9 «ВТ» **Занятие 4, 2 октября 2023**

Отображения множеств.

> Было совместное
> соответствие
> дыханья, движенья и звука
> в их первозданном
> виде.
> Надо было уметь не усиливать
> ни одно из них.
>
> *Г. Н. Айги*

Отображением или *функцией* $f\colon X\to Y$ называется правило, сопоставляющей <u>каждому</u> элементу из X <u>ровно один</u> элемент из Y.

Если $x\in X$ переходит в $y\in Y$, то x называется *образом* y, а y — *прообразом* x (пишут $x\mapsto y$ или $y=f(x)$). *Образом подмножества* $A\subset X$ называется подмножество $f(A)\subset Y$, состоящее из образов всех элементов A. *Прообразом подмножества* $B\subset Y$ называется подмножество $f^{-1}(B)\subset X$, состоящее из всех элементов, чьи образы лежат в B. *Полным прообразом элемента* $y\in Y$ называется подмножество $f^{-1}(y)\subset X$, состоящее из всех элементов, которые переходят в y.

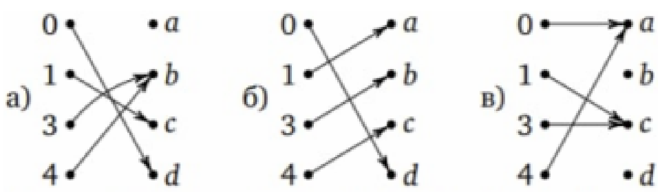
Отображение $f\colon X\to Y$ называется:

- *инъекцией*, если у разных элементов из X разные образы: $f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow x_1=x_2$.
- *сюръекцией*, если у любого элемента $y\in Y$ есть прообраз: $\forall y\in Y\,\exists x\in X\ f(x)=y$.
- *биекцией* (*взаимно однозначным соответствием*), если оно и инъекция, и сюръекция.

1 Сюръективно ли и инъективно ли отображение, сопоставляющее:

a) многоугольнику — его площадь (отображение во множество неотрицательных чисел);
b) человеку — его отца; c) положительному числу — его обратное по сложению;
d) человеку — его зубную щётку?

2 Для отображения $f\colon\{0,\,1,\,3,\,4\}\to\{a,\,b,\,c,\,d\}$ (см. рис.) найти $f(\{0,\,3\})$, $f(\{1,\,3,\,4\})$, $f^{-1}(a)$, $f^{-1}(\{a,\,b\})$, $f^{-1}(\{b,\,d\})$.



3 a) Нарисуйте все отображения $\{0,\,1,\,2\}\to\{0,\,1\}$.
b) Сколько из них инъективных, сюръективных, биективных?

4 Пусть $|X|=a$, $|Y|=b$.

a) Сколько существует отображений $X\to Y$?
b) При каких a и b существуют биекции $X\to Y$? Найдите количество этих биекций.
c) При каких a и b существуют инъекции $X\to Y$? Найдите количество этих инъекций.
d*) При каких a и b существуют сюръекции $X\to Y$? Найдите количество этих сюръекций.

5 Пусть $f\colon X\to Y$, $A_1,\,A_2\subset X$, $B_1,\,B_2\subset Y$. Верно ли, что

a) $f(X)=Y$; b) $f^{-1}(Y)=X$;
c) если $A_1\subset A_2$, то $f(A_1)\subset f(A_2)$; d) если $f(A_1)\subset f(A_2)$, то $A_1\subset A_2$;
e) $f\,(A_1\cap A_2)=f\,(A_1)\cap f\,(A_2)$; f) $f^{-1}\,(B_1\cap B_2)=f^{-1}\,(B_1)\cap f^{-1}\,(B_2)$;
g) $f\,(A_1\cup A_2)=f\,(A_1)\cup f\,(A_2)$; h) $f^{-1}\,(B_1\cup B_2)=f^{-1}\,(B_1)\cup f^{-1}\,(B_2)$;
i) $f\,(A_1\setminus A_2)=f\,(A_1)\setminus f\,(A_2)$; j) $f^{-1}\,(B_1\setminus B_2)=f^{-1}\,(B_1)\setminus f^{-1}\,(B_2)$.

6 Верно ли, что если для отображения $f\colon X\to Y$ выполняются условия $f(X)=Y$, $f^{-1}(Y)=X$, то f взаимно однозначно?