

Логика и кванторы.

Если б мне платили каждый раз,
Каждый раз, когда я думаю о тебе,
Я бы бомжевала возле трасс,
Я бы стала самой бедной из людей.

Монеточка

0 Разминка

Три школьника сделали по два утверждения про натуральные числа a, b, c :

Маша: 1) $a + b + c = 34$, 2) $abc = 56$;

Семён: 1) $ab + bc + ac = 311$, 2) наименьшее из чисел равно 5;

Лёша: 1) $a = b = c$, 2) числа a, b и c простые.

У каждого школьника одно утверждение верное, а другое нет. Найдите числа a, b, c .

Высказывание — это утверждение, об истинности которого можно судить. Любое высказывание или истинно, или ложно, это называется «законом исключённого третьего» (*tertium non datur*).

С высказываниями можно работать с помощью *логических связок*:

- *отрицание* $\neg A$: читается «не A », истинно тогда и только тогда, когда A ложно;
- *конъюнкция* $A \wedge B$: читается « A и B », истинна, если A и B оба истинны;
- *дизъюнкция* $A \vee B$: читается « A или B », истинна, если истинно хотя бы одно из двух высказываний;

• *импликация* $A \rightarrow B$: читается «из A следует B » или «если A , то B », истинна, если A и B оба истинны, либо если A ложно.

Предикат — утверждение, которое превращается в высказывание при замене переменных конкретными значениями. Превращать предикаты в высказывания можно и с помощью *кванторов*:

- *Квантор существования* $\exists xP(x)$ («существует», «некоторые»). $\exists xP(x)$ истинно тогда и только тогда, когда высказывание $P(x)$ истинно при хотя бы одном значении переменной.
- *Квантор всеобщности* $\forall xP(x)$ («для любого», «все»). $\forall xP(x)$ истинно тогда и только тогда, когда высказывание $P(x)$ истинно при всех значениях переменной.

1 Найдите логическую ошибку в эпиграфе.

2 Известно, что высказывание «Если есть в кармане пачка сигарет, значит, всё не так уж плохо на сегодняшний день» истинно. Следует ли из этого истинность высказываний

- a** «Если нет в кармане пачки сигарет, значит, всё достаточно плохо на сегодняшний день»;
b «Если всё не так уж плохо на сегодняшний день, значит, есть в кармане пачка сигарет»;
c «Если всё достаточно плохо на сегодняшний день, значит, нет в кармане пачки сигарет»?

3 На острове живут рыцари и лжецы.

- a** Островитянин А говорит: «Или я лжец, или В рыцарь». Кто из них рыцарь, а кто лжец?
b А если бы А сказал: «По крайней мере один из нас лжец»?

4 По обвинению в ограблении перед судом предстали А, В и С. Установлено следующее:

- 1) Если А не виновен или В виновен, то С виновен.
 2) Если А не виновен, то С не виновен.

Можно ли на основании этих данных установить виновность каждого из трёх подсудимых?

5 Сформулируйте отрицания к следующим утверждениям (не используя слов «неверно, что»):

- a** «все девочки любят розовый цвет»; **b** «некоторые грибы несъедобны»;
c « $43 < 15$ »; **d** «треугольник ABC остроугольный»; **e** «если $n:9$, то $n:3$ ».

6 Постройте отрицания к следующим высказываниям. Значок \neg можно ставить только непосредственно перед предикатами.

- a** $\forall xP(x)$; **b** $\exists xP(x)$; **c** $\forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$; **d** $\forall x\exists y(P(x, y) \wedge Q(x, y))$.

7 Придумайте $P(x, y)$ такой, что $\forall x \exists y P(x, y)$ верно, а $\exists x \forall y P(x, y)$ — нет.

8 Пусть $F(x, y)$ означает « x и y дружат». Переведите на русский язык высказывание $\exists x \forall y \forall z ((F(x, y) \wedge F(x, z) \wedge (y \neq z)) \rightarrow \neg F(y, z))$.

9 Предикат $P(x, y)$ определён для натуральных чисел. В верхней строчке таблицы приведены возможные значения этого предиката, в ее левом столбике — высказывания. Определите, истинно или ложно каждое из высказываний при каждом значении предиката.

	$x \leq y$	$y \dot{=} x$	$3x + 2y$ четно	$x > y$
$\forall x \forall y P(x, y)$				
$\forall x \exists y P(x, y)$				
$\exists y \forall x P(x, y)$				
$\exists x \forall y P(x, y)$				
$\forall y \exists x P(x, y)$				
$\exists x \exists y P(x, y)$				

10 Переведите на язык логики высказывания (все переменные считаются целыми числами).

- a Все числа, которые делятся на 6, делятся и на 2.
- b Между 2022 и 2023 нет ни одного числа.
- c У любого числа есть противоположное (a и b противоположны, если $a + b = 0$).
- d У любого не равного 0 числа есть обратное (a и b обратны, если $ab = 1$).
- e Некоторые числа не являются квадратами.
- f Некоторые числа являются квадратами, но не кубами.
- g Существует ровно одно число, большее 42, но меньшее 44.