Многочлены с целыми коэффициентами.

Меж тем — закончилось целое лето. Увы.

М. К. Щербаков

Напомню, на прошлом уроке мы доказали теорему о рациональном корне:

- Пусть $P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\dots+a_1x+a_0$ — многочлен с целыми коэффициентами и $x=b$ — его целый корень. Тогда $a_0 \vdots b$.
- Пусть $x=\frac{p}{q}$ — рациональный корень многочлена $P(x)$ (дробь несократима). Тогда $a_0 \vdots p$ и $a_n \vdots q$.

Ещё одна полезная теорема — целочисленная теорема Безу:
Пусть $P(x)$ – многочлен с целыми коэффициентами и a, b – целые числа.

Тогда $(P(a)-P(b)) \vdots (a-b)$. Это следует из того, что $(a^n-b^n) \vdots (a-b)$.

1 Подберите рациональные корни уравнения, а затем решите его.
a $x^4+3x^3-10x^2-21x-9=0$; b $2x^4-5x^3-19x^2+17x+5=0$.

2 Существует ли многочлен $P(x)$ с целыми коэффициентами, такой, что $P(1)=19$, $P(19)=85$?

3 Для некоторого многочлена $P(x)$ с целыми коэффициентами числа $P(0)$ и $P(1)$ чётные. Докажите, что для любого целого числа n значение $P(n)$ — чётное число.

4 Пусть $P(x)$ — многочлен с целыми коэффициентами.
a Докажите, что если a и b — числа одинаковой чётности, то $P(a)$ и $P(b)$ — тоже одинаковой чётности.
b Докажите, что если a и b — целые числа, причем $P(a)=0$ и $P(b)=1$, то или $a=b+1$, или $b=a+1$.

5 Выведите из теоремы о рациональном корне, что для любого целого a, не являющегося точным квадратом, $\sqrt{a}$ иррационально.

6 Доказать, что многочлен с целыми коэффициентами $a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\dots+a_1x+a_0$, принимающий при $x=0$ и $x=1$ нечётные значения, не имеет целых корней.

7 Многочлен $P(x)$ степени $n>2$ с целыми коэффициентами при $x=1$ принимает значение 3, а при $x=n$ значение 1. Найти n.