Многочлены. Повторение.

Но наше северное лето,
Карикатура южных зим,
Мелькнёт и нет: известно это,
Хоть мы признаться не хотим.

А. С. Пушкин

Теорема Безу. Остаток от деления $P(x)$ на $x-a$ равен $P(a)$. Отсюда следует, что $P(x) \vdots (x-a) \Leftrightarrow P(a)=0$, т. е. a — корень $P(x)$.

1 Найдите остаток от деления $x^{243}+x^{81}+x^{27}+x^9+x^3+x$ на a $x-1$; b x^2-1.

2 При каком значении a многочлен $x^{100500}+ax^{77}+7$ делится на $x+1$?

3 Некоторый многочлен даёт остаток 2 при делении на $x-1$ и остаток 1 при делении на $x-2$. Какой остаток даёт этот многочлен при делении на $(x-1)(x-2)$?

4 Выведите из теоремы Безу, что у многочлена степени n не больше n корней.

5 Докажите, что
a если два квадратных трёхчлена совпадают в трёх точках, то они равны;
b если два многочлена степени n совпадают в $n+1$ точке, они равны.

6 На плоскости расположено 100 точек. Известно, что через каждые четыре из них проходит график некоторого квадратного трёхчлена. Докажите, что все 100 точек лежат на графике одного квадратного трёхчлена.

7 Решите уравнение

$$c\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}+b\frac{(x-a)(x-c)}{(b-a)(b-c)}+a\frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}=x$$

Интерполяционный многочлен Лагранжа. Что делать, если мы хотим построить многочлен степени не выше n, принимающий в точке x_1 значение y_1, в точке x_2 значение y_2, ..., в точке x_{n+1} значение y_{n+1}? Задача 5b учит нас, что он единственен. Предлагается следующее оригинальное решение: многочлен

$$A_i(x)=y_i\frac{(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\ldots(x-x_{n+1})}{(x_i-x_1)(x_i-x_2)\ldots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\ldots(x_i-x_{n+1})}$$

в точности равен y_i в точке x_i и нулю во всех остальных. Если теперь сложить все $A_i(x)$, получившийся многочлен по-прежнему будет равен y_i в точке x_i $\forall i$.

8 Постройте многочлен $P(x)$
a второй степени такой, что $P(15)=43$, $P(5)=7$, $P(1)=79$;
b третьей степени такой, что $P(19)=69$, $P(9)=5$, $P(5)=7$, $P(2)=3$.