9ВМ, спецкурс

20 ноября 2023

Зачет по многочленам и множествам. Программа.

$\boxed{\mathbf{1}}$ Теорема Безу (формулировка и доказательство). Многочлен степени n имеет не больше n корней (доказательство).

$\boxed{\mathbf{2}}$ Теорема о рациональном корне (формулировка и доказательство).

$\boxed{\mathbf{3}}$ Целочисленная теорема Безу (формулировка и доказательство).

$\boxed{\mathbf{4}}$ Высказывания. Логические операции. Предикаты. Кванторы. (определения)

$\boxed{\mathbf{5}}$ Произведение множеств. Отношения. Рефлексивные и иррефлексивные, симметричные и антисимметричные, транзитивные отношения. Отношения эквивалентности и строгого/нестрогого порядка (определения и примеры). Разница между иррефлексивными и нерефлексивными, антисимметричными и несимметричными отношениями.

$\boxed{\mathbf{6}}$ Отображения. Образы и прообразы. Биекции, инъекции, сюръекции (определения и примеры). При каких $|A|$ и $|B|$ существуют инъекции, биекции, сюръекции из A в B (множества конечные)? Сколько существует отображений, биекций, инъекций $A \to B$ при $|A| = a$, $|B| = b$?

$\boxed{\mathbf{7}}$ Композиция отображений. Тождественное отображение (определение), его существование и единственность (доказательство). Обратное отображение (определение), его единственность (доказательство). Обратное отображение к f существует тогда и только тогда, когда f биекция.

$\boxed{\mathbf{8}}$ Равномощность (определение). Равномощность является отношением эквивалентности (доказательство). Все отрезки равномощны между собой, полуокружность без концов равномощна прямой (доказательства).

$\boxed{\mathbf{9}}$ Счетные множества (определение). Множества $\mathbb{Z}$ и $\mathbb{Q}$ счетны (доказательство).

$\boxed{\mathbf{10}}$ Любое подмножество счетного множества конечно или счетно. В любом бесконечном множестве можно выделить счетное подмножество (доказательства).

$\boxed{\mathbf{11}}$ Объединение конечного или счетного числа конечных или счетных множеств счетно (доказательство).

$\boxed{\mathbf{12}}$ Если A бесконечно, а B конечно или счетно, то $A \cup B \simeq A$. Если A несчетно, а B конечно или счетно, то $A \setminus B \simeq A$ (доказательства).

$\boxed{\mathbf{13}}$ Множество $2^{\mathbb{N}}$ бесконечных последовательностей 0 и 1 несчетно. (доказательство)

$\boxed{\mathbf{14}}$ Множество $2^{\mathbb{N}}$ и отрезок $[0, 1]$ равномощны (доказательство).

$\boxed{\mathbf{15}}$ Отрезок, квадрат и плоскость равномощны (доказательство).

$\boxed{\mathbf{16}}$ Теорема Кантора-Бернштейна (формулировка и доказательство).

9ВМ, спецкурс
20 ноября 2023
Зачет по многочленам и множествам. Программа.

$\boxed{\mathbf{1}}$ Теорема Безу (формулировка и доказательство). Многочлен степени n имеет не больше n корней (доказательство).

$\boxed{\mathbf{2}}$ Теорема о рациональном корне (формулировка и доказательство).

$\boxed{\mathbf{3}}$ Целочисленная теорема Безу (формулировка и доказательство).

$\boxed{\mathbf{4}}$ Высказывания. Логические операции. Предикаты. Кванторы. (определения)

$\boxed{\mathbf{5}}$ Произведение множеств. Отношения. Рефлексивные и иррефлексивные, симметричные и антисимметричные, транзитивные отношения. Отношения эквивалентности и строгого/нестрогого порядка (определения и примеры). Разница между иррефлексивными и нерефлексивными, антисимметричными и несимметричными отношениями.

$\boxed{\mathbf{6}}$ Отображения. Образы и прообразы. Биекции, инъекции, сюръекции (определения и примеры). При каких $|A|$ и $|B|$ существуют инъекции, биекции, сюръекции из A в B (множества конечные)? Сколько существует отображений, биекций, инъекций $A \to B$ при $|A| = a$, $|B| = b$?

$\boxed{\mathbf{7}}$ Композиция отображений. Тождественное отображение (определение), его существование и единственность (доказательство). Обратное отображение (определение), его единственность (доказательство). Обратное отображение к f существует тогда и только тогда, когда f биекция.

$\boxed{\mathbf{8}}$ Равномощность (определение). Равномощность является отношением эквивалентности (доказательство). Все отрезки равномощны между собой, полуокружность без концов равномощна прямой (доказательства).

$\boxed{\mathbf{9}}$ Счетные множества (определение). Множества $\mathbb{Z}$ и $\mathbb{Q}$ счетны (доказательство).

$\boxed{\mathbf{10}}$ Любое подмножество счетного множества конечно или счетно. В любом бесконечном множестве можно выделить счетное подмножество (доказательства).

$\boxed{\mathbf{11}}$ Объединение конечного или счетного числа конечных или счетных множеств счетно (доказательство).

$\boxed{\mathbf{12}}$ Если A бесконечно, а B конечно или счетно, то $A \cup B \simeq A$. Если A несчетно, а B конечно или счетно, то $A \setminus B \simeq A$ (доказательства).

$\boxed{\mathbf{13}}$ Множество $2^{\mathbb{N}}$ бесконечных последовательностей 0 и 1 несчетно. (доказательство)

$\boxed{\mathbf{14}}$ Множество $2^{\mathbb{N}}$ и отрезок $[0, 1]$ равномощны (доказательство).

$\boxed{\mathbf{15}}$ Отрезок, квадрат и плоскость равномощны (доказательство).

$\boxed{\mathbf{16}}$ Теорема Кантора-Бернштейна (формулировка и доказательство).