9ВМ, спецкурс, занятие 8

10 ноября 2023

Теорема Кантора-Бернштейна

Отношение $\leq$ обладает свойством *антисимметричности*: если $a \leq b$ и $b \leq a$, то $a = b$.

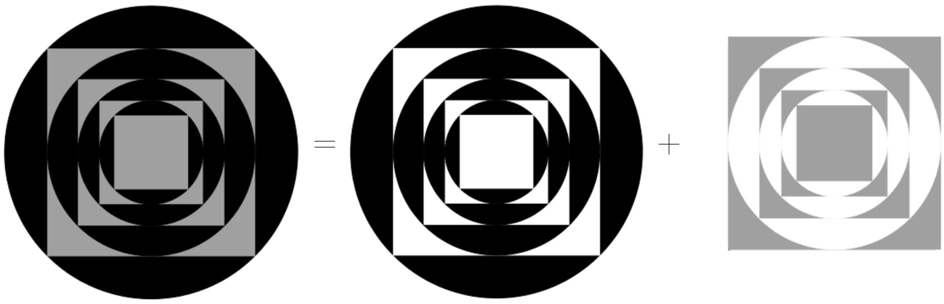
Но верно ли то же самое для отношения $\lesssim$ на мощностях множеств? (Напоминаем, что $A \lesssim B$, если есть инъекция из A в B.)

Теорема (Кантора-Бернштейна)**.** Если $A \lesssim B$ и $B \lesssim A$, то $A \simeq B$.

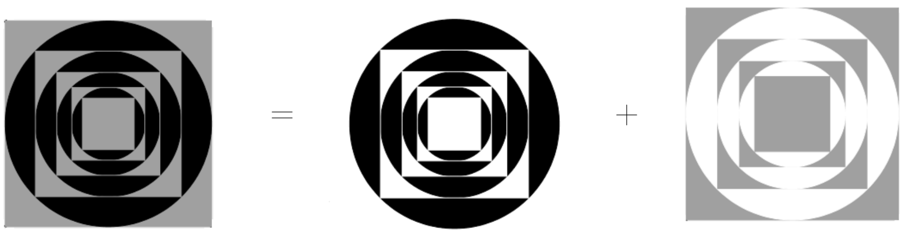
Иными словами, если существуют инъекции $f\colon A \to B$ и $g\colon B \to A$, то можно построить биекцию $A \to B$.

Путь к доказательству: докажем, что круг равномощен квадрату. Для это «разрежем» круг на две «части», заменим одну из этих частей на подобную ей, и соберем из этих частей квадрат.

Действуем так: впишем в круг квадрат. В этот квадрат впишем круг. В этот круг опять впишем квадрат и так далее (повторяем операцию счетное число раз). Покрасим картинку в шахматном порядке в два цвета. Это будут две интересующие нас части.



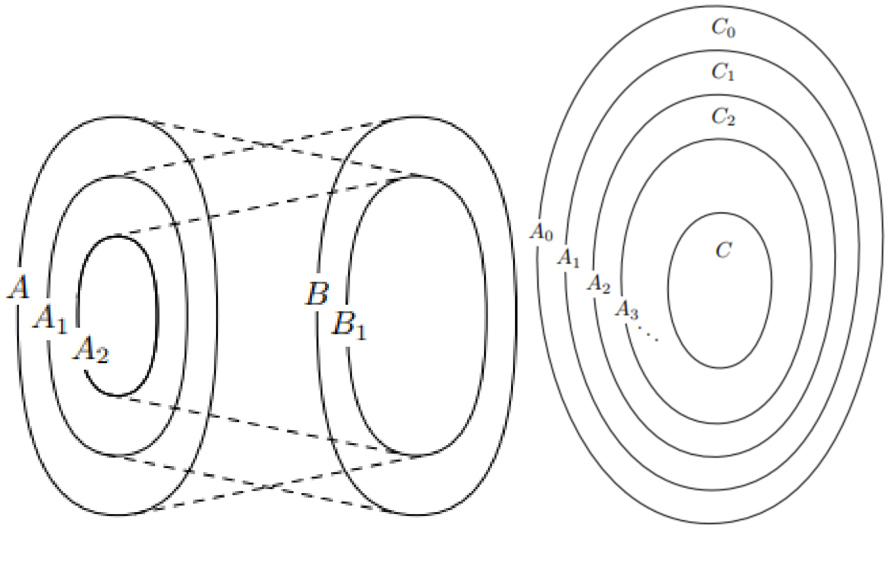
Уменьшим черную часть в $\frac{1}{\sqrt{2}}$ раза. Первый круг перейдет во второй, второй в третий,... Из получившихся частей соберется квадрат:



В этом рассуждении есть несколько тонких мест (например, требуется некоторая аккуратность при работе с точками на границах фигур), но как иллюстрация к будущему доказательству теоремы Кантора-Бернштейна оно работает хорошо.

Теперь перейдем к самому доказательству. Введем следующие обозначения.

Пусть $A_0 = A$, $A_1 = g(B) \subset A$, $B_1 = f(A)$, $A_2 = g(B_1) \subset A_1$.



Заметим, что
$A_0 \simeq f(A_0) \simeq g(f(A_0)) = A_2$ и $h = g \circ f$ — биекция между A_0 и A_2. Также, $A_1 \simeq B$. Поэтому можно переформулировать теорему Кантора-Бернштейна следующим образом.

Теорема (Кантора-Бернштейна'). Пусть $A_0 \supset A_1 \supset A_2$ и $A_0 \simeq A_2$. Тогда $A_0 \simeq A_1$.

Доказательство. Пусть $h\colon A_0 \to A_2$ — биекция. Сконструируем бесконечную цепочку множеств $A_0 \supset A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset A_4 \supset \ldots$, где $A_{n+2} = h(A_n)$.

По индукции легко доказать, что эти множества действительно вложены друг в друга: из $A_{n-1} \supset A_n$ следует, что $A_{n+1} = h(A_{n-1}) \supset h(A_n) = A_{n+2}$.

Теперь разобьем A_0 на «слои»: $C_0 = A_0 \setminus A_1$, $C_1 = A_1 \setminus A_2$, ..., $C_n = A_n \setminus A_{n-1}$. Кроме этих слоев мог остаться еще «центр» $C = A_0 \cap A_1 \cap A_2 \cap \ldots$.

Легко видеть, что $h(C_n) = C_{n+2}$ и $h(C) = C$. Теперь сконструируем биекцию $F\colon A_0 \to A_1$ следующим образом:

$$
\begin{tikzcd}
A_0 & = & C_0 \arrow[drrrr] & \cup & C_1 \arrow[d] & \cup & C_2 \arrow[drrrr] & \cup & C_3 \arrow[d] & \cup & C_4 & \cup & \ldots & \cup & C \arrow[d] \\
A_1 & = & & & C_1 & \cup & C_2 & \cup & C_3 & \cup & C_4 & \cup & \ldots & \cup & C
\end{tikzcd}
$$

То есть $F(x) = \begin{cases} h(x), & \text{если } x \in C_{2n} \\ x, & \text{если } x \in C_{2n-1} \text{ или } x \in C \end{cases}$. (Это делается аналогично биекции между квадратом и кругом: $C_0, C_2, C_4, \ldots$ соответствуют черным частям, а $C_1, C_3, C_5, \ldots$ и C – серым.)

Таким образом, A_0 и A_1 равномощны. $\square$

$\boxed{\mathbf{1}^{\vee}}$ Воспользуйтесь теоремой Кантора-Бернштейна и докажите, что

$\boxed{\text{a}}$ отрезок и интервал равномощны;

$\boxed{\text{b}}$ квадрат и треугольник равномощны;

$\boxed{\text{c}}$ куб и шар равномощны;

$\boxed{\text{d}}$ «бублик» и шар равномощны.

$\boxed{\mathbf{2}^{\vee}}$ Докажите, что любое множество точек плоскости, содержащее какой-то отрезок, имеет мощность континуум.

$\boxed{\mathbf{3}}$ Квадрат разбит на два множества. Докажите, что одно из них равномощно квадрату.

<u>Указание:</u> одно из множеств разбиения либо содержит какой-то горизонтальный отрезок, либо не содержит...

$\boxed{\mathbf{4}}$ Отрезок разбит на два множества. Докажите, что одно из них равномощно отрезку.

$\boxed{\mathbf{5}}$ $\boxed{\text{a}}$ Докажите, что множество бесконечных последовательностей, состоящих из чисел $1, 2, \ldots, n$ имеет мощность континуум.

$\boxed{\text{b}}$ Докажите, что множество бесконечных последовательностей натуральных чисел имеет мощность континуум.

$\boxed{\mathbf{6}}$ $\boxed{\text{a}}$ Можно ли расположить на отрезке счетное число непересекающихся интервалов?

$\boxed{\text{b}}$ Можно ли расположить на прямой континуум непересекающихся интервалов? (Подсказка: на каждом интервале есть рациональная точка.)

$\boxed{\text{c}}$ Можно ли расположить на плоскости континуум непересекающихся окружностей?

$\boxed{\text{d}}$ Можно ли расположить на плоскости континуум непересекающихся кругов?

$\boxed{\text{e*}}$ Можно ли расположить на плоскости континуум непересекающихся контуров «восьмерок»?

$\boxed{\text{f*}}$ Можно ли расположить на плоскости континуум непересекающихся фигур в виде буквы Т (два перпендикулярных отрезка, составленных вместе)?