9ВМ, спецкурс, занятие 7
20 октября 2023
Равномощность. Несчетные множества.

Определение. Множество A называется *несчетным*, если оно бесконечно и не является счетным.

Определение. Множество всех отображений $A \to B$ обозначается B^A. В частности, множество всех бесконечных последовательностей из 0 и 1 можно обозначить как $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ (поймите, почему это так).

Общепринятое обозначение немножко отличается: вместо $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ обычно пишут $2^{\mathbb{N}}$.

Предложение. Множество $2^{\mathbb{N}}$ несчетно.

Доказательство. Для доказательства используем так называемый *диагональный аргумент Кантора.* Допустим, множество $2^{\mathbb{N}}$ счетно. Значит, все бесконечные последовательности 0 и 1 можно пронумеровать. Сделаем это и выпишем их в столбик. Получится что-то такое:

$$
\begin{gathered}
1)\ \mathbf{0}0000000\ldots \\
2)\ 1\mathbf{0}111011\ldots \\
3)\ 11\mathbf{1}00011\ldots \\
4)\ 000\mathbf{0}0111\ldots \\
5)\ 1010\mathbf{1}010\ldots \\
\ldots
\end{gathered}
$$

В получившемся «квадрате», бесконечном вправо и вниз, выделим последовательность, образовавшуюся на диагонали. А затем инвертируем ее: нули заменим единицами, а единицы нулями. (В нашем примере получится $11010\ldots$.)

У этой новой последовательности нет номера. Действительно, она не может иметь номер n, поскольку от последовательности на n-ом месте она отличается по крайней мере в n-ой цифре. Но мы предположили, что смогли пронумеровать все последовательности, противоречие. □

Определение. Мощность счетного множества обозначается $\aleph_0$ («алеф-ноль»). Можно писать $|\mathbb{N}| = \aleph_0$.

Мощность множества бесконечных последовательностей 0 и 1 обозначается $\mathfrak{c}$: $|2^{\mathbb{N}}| = \mathfrak{c}$. Множества, равномощные множеству бесконечных последовательностей 0 и 1, называются множествами *мощности континуум* или *континуальными множествами.*

Замечание: Через $\aleph_1$ («алеф-один») обозначается «следующая» мощность после счетной (то есть если $\aleph_0 \leq |A| \leq \aleph_1$, то $|A| = \aleph_0$ или $|A| = \aleph_1$). *Континуум-гипотеза* гласит, что $\mathfrak{c} = \aleph_1$ (иными словами, не существует «промежуточной» мощности между счетной и континуумом).

В 1940 году Курт Гёдель доказал, что в стандартной теории множеств континуум-гипотезу невозможно ни доказать, ни опровергнуть.

Определение. Множество всех подмножеств множества A обозначается $\mathcal{P}(A)$.

$\boxed{\mathbf{1}^{\veebar}}$ Докажите, что $\mathcal{P}(\mathbb{N}) \simeq 2^{\mathbb{N}}$.

$\boxed{\mathbf{2}}$ Докажите, что

$\boxed{\mathrm{a}^{\veebar}}$ Любые два квадрата на плоскости равномощны.

$\boxed{\mathrm{b}^{\veebar}}$ Квадрат и прямоугольник на плоскости равномощны.

$\boxed{\mathrm{c}^{\veebar}}$ Квадрат и треугольник на плоскости равномощны.

$\boxed{\mathrm{d}}$ Вовочка доказывает пункт а) этой задачи следующим образом. «Разобьем оба квадрата на отрезки. И там, и там их бесконечно много. Любые два отрезка равномощны. Построим биекцию: точки первого отрезка первого квадрата соответствуют точкам первого отрезка второго квадрата. Точки второго отрезка первого квадрата соответствуют точкам второго отрезка второго квадрата. И так далее.»

Объясните, что в этом доказательстве не так.

Теорема. Отрезок $[0, 1]$ имеет мощность континуум.

Доказательство. Воспользуемся конструкцией «деления отрезка пополам» и установим биекцию между точками отрезка и бесконечными последовательностями 0 и 1.

Пусть $x \in [0, 1]$. Разделим отрезок пополам. Если x попал в левую половину, то пишем 0, если в правую — то 1. Теперь разделим выбранную половину опять пополам и запишем 0 или 1 в зависимости от того, куда попал x. Действуя так дальше, построим бесконечную последовательность 0 и 1, соответствующую x.

В обратную сторону: у нас есть последовательность 0 и 1, а мы хотим найти точку x. Каждый раз мы делим отрезок пополам и по очередной цифре в последовательности понимаем, в какой половине находится x. С каждым шагом мы все точнее и точнее знаем координату x, а по бесконечной последовательности находим x абсолютно точно. (Для того, чтобы сделать это доказательство строгим, необходимо воспользоваться свойством *полноты* действительных чисел, но сейчас мы просто поверим в него на слово.) $\square$

$\boxed{\mathbf{3}}$ $\boxed{\mathrm{a}}$ Какая последовательность соответствует числу $\frac{1}{3}$?

$\boxed{\mathrm{b}}$ А числу $\frac{1}{5}$?

$\boxed{\mathrm{c}}$ Какое число соответствует периодической последовательности 1(10)?

<u>Замечание:</u> если перед последовательностью для x приписать 0 и запятую, то получится бесконечная двоичная дробь, равная x.

$\boxed{\mathbf{4}}$ В доказательстве равномощности $[0, 1]$ и $2^{\mathbb{N}}$ есть проблема: некоторым точкам отрезка соответствуют две последовательности.

$\boxed{\mathrm{a}}$ Докажите, что периодические последовательности 01(0) и 00(1) соответствуют одной и той же точке. Какой?

$\boxed{\mathrm{b}}$ Найдите мощности множества таких «проблемных» точек.

$\boxed{\mathrm{c}}$ Исправьте доказательство теоремы.

$\boxed{\mathbf{5}}$ $\boxed{\mathrm{a}}$ Докажите, что $2^{\mathbb{N}} \times 2^{\mathbb{N}} \simeq 2^{\mathbb{N}}$ (множество бесконечных последовательностей 0 и 1 равномощно множеству пар таких последовательностей).

$\boxed{\mathrm{b}}$ Докажите, что отрезок равномощен квадрату.

$\boxed{\mathrm{c}}$ Докажите, что отрезок равномощен плоскости.

$\boxed{\mathbf{6*}}$ Докажите, что для любого множества $\mathcal{P}(A) \not\simeq A$.

9ВМ, спецкурс, занятие 7
20 октября 2023
Равномощность. Несчетные множества.

Определение. Множество A называется *несчетным*, если оно бесконечно и не является счетным.

Определение. Множество всех отображений $A \to B$ обозначается B^A. В частности, множество всех бесконечных последовательностей из 0 и 1 можно обозначить как $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ (поймите, почему это так).

Общепринятое обозначение немножко отличается: вместо $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ обычно пишут $2^{\mathbb{N}}$.

Предложение. Множество $2^{\mathbb{N}}$ несчетно.

Доказательство. Для доказательства используем так называемый *диагональный аргумент Кантора.* Допустим, множество $2^{\mathbb{N}}$ счетно. Значит, все бесконечные последовательности 0 и 1 можно пронумеровать. Сделаем это и выпишем их в столбик. Получится что-то такое:

$$
\begin{gathered}
1)\ \mathbf{0}0000000\ldots\\
2)\ 1\mathbf{0}111011\ldots\\
3)\ 11\mathbf{1}00011\ldots\\
4)\ 000\mathbf{0}0111\ldots\\
5)\ 1010\mathbf{1}010\ldots\\
\ldots
\end{gathered}
$$

В получившемся «квадрате», бесконечном вправо и вниз, выделим последовательность, образовавшуюся на диагонали. А затем инвертируем ее: нули заменим единицами, а единицы нулями. (В нашем примере получится $11010\ldots.$)

У этой новой последовательности нет номера. Действительно, она не может иметь номер n, поскольку от последовательности на n-ом месте она отличается по крайней мере в n-ой цифре. Но мы предположили, что смогли пронумеровать все последовательности, противоречие. $\square$

Определение. Мощность счетного множества обозначается $\aleph_0$ («алеф-ноль»). Можно писать $|\mathbb{N}| = \aleph_0$.

Мощность множества бесконечных последовательностей 0 и 1 обозначается $\mathfrak{c}$: $|2^{\mathbb{N}}| = \mathfrak{c}$. Множества, равномощные множеству бесконечных последовательностей 0 и 1, называются множествами *мощности континуум* или *континуальными множествами.*

<u>Замечание:</u> Через $\aleph_1$ («алеф-один») обозначается «следующая» мощность после счетной (то есть если $\aleph_0 \le |A| \le \aleph_1$, то $|A| = \aleph_0$ или $|A| = \aleph_1$). *Континуум-гипотеза* гласит, что $\mathfrak{c} = \aleph_1$ (иными словами, не существует «промежуточной» мощности между счетной и континуумом).

В 1940 году Курт Гёдель доказал, что в стандартной теории множеств континуум-гипотезу невозможно ни доказать, ни опровергнуть.

Определение. Множество всех подмножеств множества A обозначается $\mathcal{P}(A)$.

$\boxed{\mathbf{1}^{\vee}}$ Докажите, что $\mathcal{P}(\mathbb{N}) \simeq 2^{\mathbb{N}}$.

$\boxed{\mathbf{2}}$ Докажите, что

$\boxed{\mathrm{a}^{\vee}}$ Любые два квадрата на плоскости равномощны.

$\boxed{\mathrm{b}^{\vee}}$ Квадрат и прямоугольник на плоскости равномощны.

$\boxed{\mathrm{c}^{\vee}}$ Квадрат и треугольник на плоскости равномощны.

$\boxed{\mathrm{d}}$ Вовочка доказывает пункт а) этой задачи следующим образом. «Разобьем оба квадрата на отрезки. И там, и там их бесконечно много. Любые два отрезка равномощны. Построим биекцию: точки первого отрезка первого квадрата соответствуют точкам первого отрезка второго квадрата. Точки второго отрезка первого квадрата соответствуют точкам второго отрезка второго квадрата. И так далее.»

Объясните, что в этом доказательстве не так.

Теорема. Отрезок $[0, 1]$ имеет мощность континуум.

Доказательство. Воспользуемся конструкцией «деления отрезка пополам» и установим биекцию между точками отрезка и бесконечными последовательностями 0 и 1.

Пусть $x \in [0, 1]$. Разделим отрезок пополам. Если x попал в левую половину, то пишем 0, если в правую — то 1. Теперь разделим выбранную половину опять пополам и запишем 0 или 1 в зависимости от того, куда попал x. Действуя так дальше, построим бесконечную последовательность 0 и 1, соответствующую x.

В обратную сторону: у нас есть последовательность 0 и 1, а мы хотим найти точку x. Каждый раз мы делим отрезок пополам и по очередной цифре в последовательности понимаем, в какой половине находится x. С каждым шагом мы все точнее и точнее знаем координату x, а по бесконечной последовательности находим x абсолютно точно. (Для того, чтобы сделать это доказательство строгим, необходимо воспользоваться свойством *полноты* действительных чисел, но сейчас мы просто поверим в него на слово.) $\square$

$\boxed{\mathbf{3}}$ $\boxed{\mathrm{a}}$ Какая последовательность соответствует числу $\frac{1}{3}$?

$\boxed{\mathrm{b}}$ А числу $\frac{1}{5}$?

$\boxed{\mathrm{c}}$ Какое число соответствует периодической последовательности 1(10)?

Замечание: если перед последовательностью для x приписать 0 и запятую, то получится бесконечная двоичная дробь, равная x.

$\boxed{\mathbf{4}}$ В доказательстве равномощности $[0, 1]$ и $2^{\mathbb{N}}$ есть проблема: некоторым точкам отрезка соответствуют две последовательности.

$\boxed{\mathrm{a}}$ Докажите, что периодические последовательности 01(0) и 00(1) соответствуют одной и той же точке. Какой?

$\boxed{\mathrm{b}}$ Найдите мощности множества таких «проблемных» точек.

$\boxed{\mathrm{c}}$ Исправьте доказательство теоремы.

$\boxed{\mathbf{5}}$ $\boxed{\mathrm{a}}$ Докажите, что $2^{\mathbb{N}} \times 2^{\mathbb{N}} \simeq 2^{\mathbb{N}}$ (множество бесконечных последовательностей 0 и 1 равномощно множеству пар таких последовательностей).

$\boxed{\mathrm{b}}$ Докажите, что отрезок равномощен квадрату.

$\boxed{\mathrm{c}}$ Докажите, что отрезок равномощен плоскости.

$\boxed{\mathbf{6*}}$ Докажите, что для любого множества $\mathcal{P}(A) \not\simeq A$.