9ВМ, спецкурс, занятие 6
13 октября 2023
Равномощность. Счетные множества.

Определение. Множества A и B называются *равномощными*, если между ними существует биекция. Обозначается $|A|=|B|$, $A\simeq B$ или $A\cong B$.

Если существует инъекция из A в B, то говорят, что мощность A не больше мощности B. Обозначается $|A|\leq|B|$ или $A\lesssim B$.

В случае конечных множеств сравнение мощностей соответствует просто сравнению числа элементов в одном и в другом множестве.

Предложение (Свойства равномощности)**.** Пусть $A\simeq B$ и $C\simeq D$. Тогда

- $A\times C\simeq B\times D$.
- $A\cup C\simeq B\cup D$ (если A и C, а также B и D не пересекаются).

Определение. Множества, равномощные множеству натуральных чисел $\mathbb{N}$, называются *счетными*.

Чтобы доказать, что множество A счетно, нужно придумать правило (алгоритм), позволяющее пронумеровать (последовательно перебрать один за другим) его элементы. Каждый элемент A должен получить ровно один натуральный номер (и каждый номер должен кто-то получить).

Примеры.

- Множество $\mathbb{N}\cup\{0\}$ счетно, потому что его элементы можно перебрать в порядке $0, 1, 2, 3, \ldots$.
- Множество четных натуральных чисел счетно, поскольку его элементы можно перебрать в порядке $2, 4, 6, 8, \ldots$.

Предложение. Любое подмножество счетного множества конечно или счетно.

Доказательство. Пронумеруем элементы нашего счетного множества: $A=\{a_1, a_2, a_3, \ldots\}$. Пусть $B\subset A$ — наше подмножество. Если B пустое, то все хорошо. Если оно непустое, то по принципу наименьшего элемента, существует элемент B с наименьшим номером. Обозначим его через b_1.

Выкинем b_1 из B. Если $B\setminus\{b_1\}$ непусто, то в нем найдется элемент с наименьшим номером, обозначим его через b_2. Дальше найдем элемент с наименьшим номером в $B\setminus\{b_1, b_2\}$, обозначим его через b_3 и так далее. Если в какой-то момент все элементы B исчерпаются, то оно конечно. В противном случае каждый элемент $b\in B$ в какой-то момент получит свой номер (если $b=a_n$, то не позже n-го шага), и B будет счетным. $\square$

Следствие. Множество простых чисел счетно.

Предложение. В любом бесконечном множестве есть счетное подмножество.

Доказательство. Возьмем наше множество A. Выберем из него произвольный элемент a_1. Затем выберем из непустого множества $A \setminus \{a_1\}$ произвольный элемент a_2. Затем выберем из $A \setminus \{a_1, a_2\}$ произвольный элемент a_3 и так далее.

На n-ом шаге выбираем из множества $A \setminus \{a_1, \ldots, a_{n-1}\}$ элемент a_n (это можно сделать, потому что при выкидывании конечного числа элементов из бесконечного множества там еще что-то остается).

В итоге элементы $\{a_1, a_2, \ldots\} \subset A$ образуют счетное подмножество в A. □

$\boxed{\mathbf{1}^{\veebar}}$ $\boxed{\text{a}}$ Докажите, что равномощность является отношением эквивалентности.

$\boxed{\text{b}}$ Докажите, что отношение «не больше по мощности» $\lesssim$ является рефлексивным и транзитивным.

$\boxed{\mathbf{2}^{\veebar}}$ $\boxed{\text{a}}$ Существует инъекция $A \to B$. Правда ли, что существует сюръекция $B \to A$?

$\boxed{\text{b}}$ Существует сюръекция $B \to A$. Правда ли, что существует инъекция $A \to B$?

$\boxed{\mathbf{3}}$ Докажите, что следующие множества счетны:

$\boxed{\text{a}}$ множество целых чисел, больших -43;

$\boxed{\text{b}}$ множество целых чисел;

$\boxed{\text{c}}$ объединение счетного и конечного множества;

$\boxed{\text{d}}$ объединение двух счетных множеств;

$\boxed{\text{e}}$ объединение конечного числа счетных множеств.

$\boxed{\mathbf{4}}$ Докажите, что следующие множества счетны:

$\boxed{\text{a}}$ множество $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ (множество упорядоченных пар натуральных чисел);

Подсказка: каждой такой паре можно сопоставить одну клетку в I координатной четверти. Как перенумеровать все клетки?

$\boxed{\text{b}}$ множество рациональных чисел $\mathbb{Q}$ (рациональные числа – это дроби $\frac{a}{b}$, где $a \in \mathbb{Z}$ и $b \in \mathbb{N}$);

$\boxed{\text{c}}$ объединение счетного числа счетных множеств;

$\boxed{\text{d}}$ множество конечных последовательностей из 0 и 1.

$\boxed{\text{e}}$ множество последовательностей натуральных чисел длиной 43.

$\boxed{\text{f}}$ множество конечных последовательностей натуральных чисел.

$\boxed{\mathbf{5}}$ $\boxed{\text{a}}$ Множество A бесконечно. Докажите, что $A \cup \{a\} \simeq A$;

$\boxed{\text{b}}$ Множество A бесконечно, множество B конечно или счетно. Докажите, что $A \cup B \simeq A$.

$\boxed{\text{c}}$ Множество A несчетно (бесконечно и не является счетным), множество B счетно. Докажите, что $A \setminus B \simeq A$.

Подсказка: в пунктах a и b нужно воспользоваться тем, что любое бесконечно множество содержит счетное подмножество.

$\boxed{\mathbf{6}}$ Докажите, что следующие множества равномощны:

$\boxed{\text{a}}$ отрезок $[0, 1]$ и полуинтервал $[0, 1)$ (постройте явную биекцию);

$\boxed{\text{b}}$ отрезок $[0, 1]$ и интервал $(0, 1)$;

$\boxed{\text{c}}$ отрезок $[0, 1]$ и окружность $x^2 + y^2 = 1$;

$\boxed{\text{d}}$ отрезок $[0, 1]$ и прямая $(-\infty, +\infty)$.