9ВМ, спецкурс, занятие 5
6 октября 2023
Композиции отображений

Определение. Пусть $f\colon X \to Y$ и $g\colon Y \to Z$. *Композицией* этих отображений называется отображение $g \circ f\colon X \to Z$, получающееся последовательным применением сначала отображения f, а затем отображения g.

Важно! Отображения в композиции применяются справа налево. Это нужно, чтобы работало равенство $(g \circ f)(x) = g(f(x))$.

Для композиций не работает переместительный закон, но работает сочетательный. Если $f\colon X \to Y$, $g\colon Y \to Z$ и $h\colon Z \to W$, то $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.

Определение. Отображение $\mathrm{id}_X\colon X \to X$ называется *тождественным*, если для любой функции $f\colon X \to Y$ выполняется $f \circ \mathrm{id}_X = f$ и для любой функции $g\colon Y \to X$ выполняется $\mathrm{id}_X \circ g = g$.

Иногда вместо id_X пишут просто id.

Предложение. Тождественное отображение id_X существует и единственно.

Доказательство.

Существование: отображение, переводящее каждый элемент $x \in X$ в себя, является тождественным.

Единственность: допустим, существуют два тождественных отображения: id_X^1 и id_X^2. Рассмотрим их композицию $\mathrm{id}_X^1 \circ \mathrm{id}_X^2$. С одной стороны, правая композиция с тождественным отображением id_X^2 не меняет отображения, поэтому $\mathrm{id}_X^1 \circ \mathrm{id}_X^2 = \mathrm{id}_X^1$. С другой стороны, левая композиция с тождественным отображением id_X^1 тоже не меняет отображения, поэтому $\mathrm{id}_X^1 \circ \mathrm{id}_X^2 = \mathrm{id}_X^2$. Следовательно, $\mathrm{id}_X^1 = \mathrm{id}_X^2$. □

Определение. Пусть $f\colon X \to Y$. Отображение $g\colon Y \to X$ называется *обратным* к f, если $f \circ g = \mathrm{id}_Y$ и $g \circ f = \mathrm{id}_X$. (Иными словами, $f(g(y)) = y$ для всех $y \in Y$ и $g(f(x)) = x$ для всех $x \in X$.)

Обратное отображение к f часто обозначают f^{-1}. Важно не путать обратное отображение с прообразом элемента/подмножества (это связанные вещи, но все же разные), а также $f^{-1}(x)$ и $\frac{1}{f(x)}$.

Предложение. Если обратное отображение к $f\colon X \to Y$ существует, то оно единственно.

Доказательство. Допустим, что g_1 и g_2 — два обратных отображения к f. Рассмотрим композицию $g_1 \circ f \circ g_2$:

$$g_1 \circ f \circ g_2 = g_1 \circ (f \circ g_2) = g_1 \circ \mathrm{id}_Y = g_1$$

$$g_1 \circ f \circ g_2 = (g_1 \circ f) \circ g_2 = \mathrm{id}_X \circ g_2 = g_2$$

Значит, $g_1 = g_2$, что и требовалось доказать. □

$\boxed{\mathbf{1}^{\veebar}}$ Даны три отображения

$$f: \{1, 2, 3, 5\} \to \{0, 1, 2\}, \text{ где } 1 \mapsto 1, 2 \mapsto 1, 3 \mapsto 0, 5 \mapsto 2$$

$$g: \{0, 1, 2\} \to \{3, 7, 37, 137\}, \text{ где } 0 \mapsto 3, 1 \mapsto 137, 2 \mapsto 7$$

$$h: \{3, 7, 37, 137\} \to \{1, 2, 3, 5\}, \text{ где } 3 \mapsto 1, 7 \mapsto 3, 37 \mapsto 3, 137 \mapsto 2.$$

Нарисуйте картинки для следующих отображений: f, g, h, $g \circ f$, $h \circ g$, $f \circ h \circ g$, $g \circ h \circ f$.

$\boxed{\mathbf{2}}$ Верно ли, что

$\boxed{\text{a}}$ композиция $f \circ g$ инъекции f и инъекции g всегда является инъекцией?

$\boxed{\text{b}}$ композиция $f \circ g$ сюръекции f и сюръекции g всегда является сюръекцией?

$\boxed{\text{c}}$ композиция $f \circ g$ сюръекции f и инъекции g всегда является сюръекцией?

$\boxed{\text{d}}$ композиция $f \circ g$ инъекции f и сюръекции g всегда является инъекцией?

$\boxed{\mathbf{3}}$ Докажите, что обратное отображение к $f\colon X \to Y$ существует в том и только том случае, когда f — биекция.

$\boxed{\mathbf{4}^{\veebar}}$ Найдите обратные к следующим отображениям:

$\boxed{\text{a}}$ $f(x) = 3x + 2$; $\boxed{\text{b}}$ $f(x) = \dfrac{x+1}{x+2}$.

$\boxed{\mathbf{5}}$ Про отображения $f\colon X \to Y$ и $g\colon Y \to X$ известно, что $g \circ f = \mathrm{id}_X$.

$\boxed{\text{a}}$ Докажите, что g — сюръекция, а f — инъекция.

$\boxed{\text{b}}$ Верно ли, что f и g — биекции?

$\boxed{\mathbf{6}^{\veebar}}$ Между какими из следующих множеств существуют биекции?

$\boxed{\text{a}}$ множество натуральных чисел;

$\boxed{\text{b}}$ множество целых неотрицательных чисел;

$\boxed{\text{c}}$ множество четных натуральных чисел;

$\boxed{\text{d}}$ множество нечетных натуральных чисел;

$\boxed{\text{e}}$ множество нечетных квадратов.

$\boxed{\mathbf{7}}$ Установите биекции между следующими множествами:

$\boxed{\text{a}}$ Множество подмножеств множества $\{1, 2, \ldots, n\}$, содержащих 1, и множество подмножеств, не содержащих 1.

$\boxed{\text{b}}$ Множество подмножеств множества $\{1, 2, \ldots, n\}$ с четным числом элементов и множество подмножеств с нечетным числом элементов.

$\boxed{\text{c}}$ Множество всех подмножеств множества X и множество всех отображений $f\colon X \to \{0, 1\}$.

$\boxed{\text{d}}$ Множество точек отрезка AB и множество точек параллельного ему отрезка CD.

$\boxed{\text{e}}$ Множество точек полуокружности без концов $x^2 + y^2 = 1$, $y > 0$ и множество точек прямой $y = 1$.

$\boxed{\text{f}}$ Множество точек полуинтервала $(0, 1]$ и множество точек луча $[1, +\infty)$.

$\boxed{\mathbf{8}}$ Установите биекцию между множеством бесконечных последовательностей, состоящих из 0 и 1, и множеством бесконечных последовательностей, состоящих из $0, 1, \ldots, n$.

$\boxed{\text{a}}$ для $n = 3$; $\boxed{\text{b*}}$ для $n = 2$; $\boxed{\text{c*}}$ для произвольного n.