9ВМ, спецкурс, занятие 4
29 сентября 2023

Множества. Отображения.

Определение. *Произведением множеств* $X \times Y$ называется множество всех возможных *упорядоченных пар* (x, y), где первый элемент — из X, а второй — из Y.

$$X \times Y = \{(x, y) \mid x \in X, y \in Y\} .$$

Предложение. Мощность произведения двух конечных множеств равна произведению их мощностей: $|X \times Y| = |X| \cdot |Y|$.

Определение. *Отображением* или *функцией* $f\colon X \to Y$ называется правило, сопоставляющей каждому элементу из X ровно один элемент из Y.

Образом элемента $x \in X$ называется элемент $y \in Y$, в который x переходит. Пишут $x \mapsto y$ или $y = f(x)$.

Образом подмножества $A \subset X$ называется подмножество $f(A) \subset Y$, состоящее из образов всех элементов A.

Полным прообразом элемента $y \in Y$ называется подмножество $f^{-1}(y) \subset X$, состоящее из всех элементов, которые переходят в y. *Прообразом подмножества* $B \subset Y$ называется подмножество $f^{-1}(B) \subset X$, состоящее из всех элементов, чьи образы лежат в B.

$$f^{-1}(y) = \{x \in X \mid f(x) = y\}$$

$$f^{-1}(B) = \{x \in X \mid f(x) \in B\}$$

$\boxed{\mathbf{0}}$ Может ли при отображении $f\colon X \to Y$ найтись
- $\boxed{\text{a}}$ элемент, не имеющий образа;
- $\boxed{\text{b}}$ элемент, не имеющий прообраза;
- $\boxed{\text{c}}$ элемент, имеющий несколько прообразов;
- $\boxed{\text{d}}$ элемент, имеющий несколько образов?

Определение. Отображение $f\colon X \to Y$ называется:

• *инъекцией* (*инъективным отображением*), если у разных элементов из X разные образы: $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$.

• *сюръекцией* (*сюръективным отображением*), если у любого элемента $y \in Y$ есть прообраз: $\forall y \in Y \exists x \in X\ f(x) = y$.

• *биекцией* (*биективным отображением*), если оно одновременно инъекция и сюръекция. Иными словами, биекция — это взаимно-однозначное соответствие.

Определение. *Отношение* на множестве M – это подмножество $R \subset M \times M$. Если $(a, b) \in R$, то мы пишем aRb, если $(a, b) \notin R$, то пишем $a\not{R}b$.

Определение. • Если $\forall a\ aRa$, то R *рефлексивно.* Если $\forall a\ a\not{R}a$, то R *антирефлексивно* (или *иррефлексивно*).

• Если $\forall a \forall b (aRb \to bRa)$, то R *симметрично.* Если $\forall a \forall b ((aRb \wedge bRa) \to a = b)$, то R *антисимметрично.*

• Если $\forall a \forall b \forall c ((aRb \wedge bRc) \to aRc)$, то R *транзитивно.*

• Если отношение R рефлексивно, симметрично и транзитивно, то это *отношение эквивалентности.*

• Если отношение R рефлексивно, антисимметрично, и транзитивно, то это *отношение нестрогого порядка.* (Часто говорят просто об *отношении порядка.*)

• Если отношение R антирефлексивно и транзитивно, то это *отношение строгого порядка.*

Предложение. Если $\succ$ – отношение строгого порядка, то если $a \succ b$, то $b \not\succ a$.

Доказательство. Если $a \succ b$ и $b \succ a$, то по транзитивности $a \succ a$, что противоречит антирефлексивности. $\square$

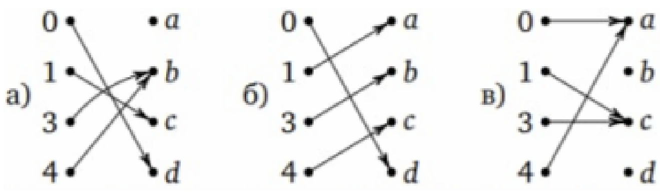
$\boxed{\mathbf{1}}$ $\boxed{\text{a}}$ Докажите, что $(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)$.

$\boxed{\text{b}}$ Докажите, что $(A \times B) \cup (C \times D) \subseteq (A \cup C) \times (B \cup D)$. Когда выполняется равенство?

$\boxed{\mathbf{2}^{\vee}}$ $\boxed{\text{a}}$ Нарисуйте все отображения $\{0,\, 1,\, 2\} \to \{0,\, 1\}$.

$\boxed{\text{b}}$ Сколько из них инъективных, сюръективных, биективных?

$\boxed{\mathbf{3}^{\vee}}$ Для отображения $f\colon \{0,\, 1,\, 3,\, 4\} \to \{a,\, b,\, c,\, d\}$ (см. рис.) найти $f(\{0,\, 3\})$, $f(\{1,\, 3,\, 4\})$, $f^{-1}(a)$, $f^{-1}(\{a,\, b\})$, $f^{-1}(\{b,\, d\})$.



$\boxed{\mathbf{4}}$ Пусть $|X| = a$, $|Y| = b$.

$\boxed{\text{a}}$ Сколько существует отображений $X \to Y$?

$\boxed{\text{b}}$ При каких a и b существуют биекции $X \to Y$? Найдите количество этих биекций.

$\boxed{\text{c}}$ При каких a и b существуют инъекции $X \to Y$? Найдите количество этих инъекций.

$\boxed{\text{d*}}$ При каких a и b существуют сюръекции $X \to Y$? Найдите количество этих сюръекций.

$\boxed{\mathbf{5}}$ Пусть $f\colon X \to Y$, $A_1,\, A_2 \subset X$, $B_1,\, B_2 \subset Y$. Верно ли, что

$\boxed{\text{a}}$ $f(X) = Y$; $\boxed{\text{b}}$ $f^{-1}(Y) = X$;

$\boxed{\text{c}}$ если $A_1 \subset A_2$, то $f(A_1) \subset f(A_2)$; $\boxed{\text{d}}$ если $f(A_1) \subset f(A_2)$, то $A_1 \subset A_2$;

$\boxed{\text{e}}$ $f\ (A_1 \cap A_2) = f\ (A_1) \cap f\ (A_2)$; $\boxed{\text{f}}$ $f^{-1}\ (B_1 \cap B_2) = f^{-1}\ (B_1) \cap f^{-1}\ (B_2)$;

$\boxed{\text{g}}$ $f\ (A_1 \cup A_2) = f\ (A_1) \cup f\ (A_2)$; $\boxed{\text{h}}$ $f^{-1}\ (B_1 \cup B_2) = f^{-1}\ (B_1) \cup f^{-1}\ (B_2)$;

$\boxed{\text{i}}$ $f\ (A_1 \setminus A_2) = f\ (A_1) \setminus f\ (A_2)$; $\boxed{\text{j}}$ $f^{-1}\ (B_1 \setminus B_2) = f^{-1}\ (B_1) \setminus f^{-1}\ (B_2)$.

$\boxed{\mathbf{6}^{\vee}}$ Являются ли эти отношения рефлексивными, симметричными, антисимметричными, транзитивными, отношениями эквивалентности, отношениями строгого/нестрогого порядка?

$\boxed{\text{a}}$ «a перпендикулярна b» на множестве всех прямых на плоскости;

$\boxed{\text{b}}$ «a параллельна b» на множестве всех прямых на плоскости;

$\boxed{\text{c}}$ «$a + b$ четно» на множестве натуральных чисел;

$\boxed{\text{d}}$ «$a \,\vdots\, b$» на множестве натуральных чисел;

$\boxed{\text{e}}$ «$a \,\vdots\, b$» на множестве целых чисел;

$\boxed{\text{f}}$ «каждая сторона треугольника a короче каждой стороны треугольника b» на множестве всех треугольников на плоскости.

$\boxed{\text{g}}$ «какая-то сторона a не длиннее какой-то стороны b» на множестве всех треугольников на плоскости.

$\boxed{\mathbf{7}}$ $\boxed{\text{a}}$ Правда ли, что любое антирефлексивное отображение не рефлексивно? Правда ли, что любое не рефлексивное отображение антирефлексивно?

$\boxed{\text{b}}$ А что можно сказать про не симметричные и антисимметричные отношения?

$\boxed{\mathbf{8}}$ Множество M содержит n элементов. Сколько на этом множестве существует

$\boxed{\text{a}}$ отношений;

$\boxed{\text{b}}$ рефлексивных отношений;

$\boxed{\text{c}}$ симметричных отношений;

$\boxed{\text{d}}$ антисимметричных отношений?

$\boxed{\mathbf{9}}$ $\boxed{\text{a}}$ Катя придумала какое-то отношение нестрогого порядка $\succeq$ на множестве M. Как Маше сделать из него отношение нестрогого порядка на $M \times M$?

$\boxed{\text{b*}}$ Катя придумала какое-то отношение нестрогого *линейного* порядка $\succeq$ на множестве M (это значит, что любые два элемента $a,\, b \in M$ сравнимы: либо $a \succeq b$, либо $b \succeq a$). Как Маше сделать из него отношение нестрогого линейного порядка на $M \times M$?