

9В, спецкурс, занятие 3

22 сентября 2023

Логика высказываний

Высказывание – это утверждение, про которое можно сказать, истинно оно или ложно.

Из простых высказываний можно получать более сложные, используя логические связи.

- *отрицание* $\neg A$: читается «не A », истинно всякий раз, когда A ложно;
- *конъюнкция* $A \wedge B$: читается « A и B », истинна, если A и B оба истинны;
- *дизъюнкция* $A \vee B$: читается « A или B », истинна, если истинно хотя бы одно из двух высказываний;
- *импликация* $A \rightarrow B$: читается «из A следует B » или «если A , то B », истинна, если A и B оба истинны, либо если A ложно.

Предикат — это высказывание, содержащее переменную (или несколько переменных).

Квантор существования $\exists xP(x)$ («существует», «некоторые») превращает предикат $P(x)$ в высказывание, истинное в том и только том случае, если высказывание $P(x)$ истинно при хотя бы одном значении переменной.

Квантор общности $\forall xP(x)$ («для всех», «все») превращает предикат $P(x)$ в высказывание, истинное в том и только том случае, если высказывание $P(x)$ истинно при всех значениях переменной.

1 У жителя острова Рыцарей и Лжецов спрашивают: «Вы рыцарь?» Тот отвечает: «Если я рыцарь, то съем собственную шляпу». Докажите, что ему придется съесть свою шляпу.

2 Известно, что высказывание «Если есть в кармане пачка сигарет, значит все не так уж плохо на сегодняшний день» истинно. Следует ли из этого истинность высказываний

- a** «Если нет в кармане пачки сигарет, значит все плохо на сегодняшний день»;
- b** «Если все не так уж плохо на сегодняшний день, значит есть в кармане пачка сигарет»;
- c** «Если все плохо на сегодняшний день, значит нет в кармане пачки сигарет»?

3 **a** Следующее высказывание истинно: «Я люблю Бетти или я люблю Джейн; кроме того, если я люблю Бетти, то я люблю Джейн.» Следует ли из него, что я люблю Бетти? Следует ли из него, что я люблю Джейн?

b Следующее высказывание истинно: «Если я люблю Бетти или Джейн, то я люблю Бетти и не люблю Сью.» Можно ли сказать про какую-то из девочек, что я ее точно люблю? Могу ли я любить всех? Не любить никого?

c Предположим, что у меня спрашивают: «Верно ли, что если вы любите Бетти, то вы также любите Джейн?» Я отвечаю: «Если это верно, то я люблю Бетти.» Следует ли отсюда, что я люблю Бетти? Следует ли отсюда, что я люблю Джейн?

4 По кругу стоит 30 рыцарей и 30 лжецов. Какое максимальное количество человек из них может произнести фразу «Если я лжец, то хотя бы один из моих соседей рыцарь»?

5[✓] Предикат $P(x, y)$ определен для натуральных чисел (ноль не натуральное). В верхней строчке таблицы приведены возможные значения этого предиката, в ее левом столбике — высказывания. Определите, истинно или ложно каждое из высказываний при каждом значении предиката.

	$x \leq y$	$y \div x$	$3x + 2y$ четно	$x > y$
$\forall x \forall y P(x, y)$				
$\forall x \exists y P(x, y)$				
$\exists y \forall x P(x, y)$				
$\exists x \forall y P(x, y)$				
$\forall y \exists x P(x, y)$				
$\exists x \exists y P(x, y)$				

6[✓] Предикаты $C(x)$ и $F(x)$ определены на множестве всех людей Земли. $C(x)$ означает « x — клоун», а $F(x)$ — « x смешной». Переведите высказывания на русский язык. (Постарайтесь, чтобы результат перевода звучал как нормальная русская фраза.)

- a** $\forall x(C(x) \rightarrow F(x))$; **b** $\forall x(C(x) \wedge F(x))$; **c** $\exists x(C(x) \wedge F(x))$;

7 Пусть $F(x, y)$ означает « x и y дружат». Переведите на русский язык высказывание $\exists x \forall y \forall z ((F(x, y) \wedge F(x, z) \wedge (y \neq z)) \rightarrow \neg F(y, z))$.

8[✓] Переведите на язык логики высказывания (все переменные считаются целыми числами).

- a** Все числа, которые делятся на 6, делятся и на 2.
b Между 2022 и 2023 нет ни одного числа.
c У любого числа есть противоположное (a и b противоположны, если $a + b = 0$).
d У любого не равного 0 числа есть обратное (a и b обратны, если $ab = 1$).
e Некоторые числа не являются квадратами.
f Некоторые числа являются квадратами, но не кубами.

g Существует ровно одно число, большее 42, но меньшее 44. (Знак $\exists!$ использовать нельзя.)

9 Постройте отрицания к следующим высказываниям. Значок \neg можно ставить только непосредственно перед предикатами.

- a** $\forall x P(x)$; **b** $\exists x P(x)$; **c** $\forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$; **d** $\forall x \exists y(P(x, y) \wedge Q(x, y))$;
e $\exists x \forall y \exists z \exists w(P(x, y, z, w) \vee Q(x, y, z, w))$; **f** $\forall x(P(x) \rightarrow (\exists y Q(x, y)))$.

10 Можно ли выразить:

- a** \rightarrow , используя три другие логические связки;
b \vee , используя только \wedge и \neg ;
c \wedge , используя только \rightarrow и \neg ;
d \vee , используя только \rightarrow ;
e \neg , используя три другие логические связки?

Ничем, кроме логических связок в этой задаче пользоваться нельзя. Например, нельзя использовать утверждение « $2 + 2 = 5$ » в качестве всегда ложного.