9ВМ, спецкурс, занятие 25

12 апреля

Доказательство неравенств

Для доказательства неравенств можно использовать следующие методы:

- Разложение на множители;
- Выделение полных квадратов;
- Применение одного из *классических неравенств.*

Теорема (неравенства о средних)**.** Для <u>положительных</u> чисел a и b можно вычислить

- их *среднее арифметическое* $\dfrac{a+b}{2}$;
- их *среднее геометрическое* $\sqrt{ab}$;
- их *среднее гармоническое* $\dfrac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$;
- их *среднее квадратичное* $\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}$.

Эти средние связаны следующими неравенствами:

$$\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} \leq \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}},$$

которые обращаются в равенства только в случае $a=b$.

Доказательство. Каждое из этих трех неравенств равносильно $(a-b)^2 \geq 0$. Детали оставляем в качестве упражнения. □

Теорема (неравенство о трех квадратах)**.** Для <u>произвольных</u> чисел a, b, c выполняется неравенство

$$a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ca,$$

причем равенство достигается только в случае $a=b=c$.

Доказательство. Домножим неравенство на 2 и перенесем все в левую половину.

$$2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ca \geq 0,$$

что равносильно верному неравенству

$$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2 \geq 0.$$

Равенство, очевидно, достигается, только когда все три квадрата равны 0, то есть при $a=b=c$. □

1$^{\vee}$ Докажите неравенства при помощи разложения на множители или выделения полных квадратов:

a) $2a^2+b^2+c^2 \geq 2a(b+c)$;

b) $a^5-b^5 \geq a^4b-ab^4$, если $a \geq b$;

c) $a^7+b^7 \geq a^5b^2+a^2b^5$, если $a,\ b \geq 0$;

d) $a^4-2a^3b+2a^2b^2-2ab^3+b^4 \geq 0$;

e) $a^2b+2b^2+4a < ab^2+2a^2+4b$, если $a<b<2$.

2 Рассмотрим трапецию, основания которой равны a и b и проведем в ней следующие четыре параллельных основанию отрезка:

- среднюю линию;
- отрезок, делящий трапецию на две подобные;
- отрезок, делящий трапецию на две части равной площади;
- отрезок, проходящий черед точку пересечения диагоналей.

a) Выразите длины этих отрезков через a и b.

b) Сравните эти длины, используя геометрические соображения.

3 Докажите неравенства для положительных чисел. Когда достигается равенство?

a) $\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x} \geq 2$. b) $\dfrac{a+c}{2}+\dfrac{b+d}{2} \geq \sqrt{(a+b)(c+d)}$;

c) $(a+1)(b+1)(ab+1) \geq 8ab$; d) $\sqrt{a^2+b^2}\cdot\sqrt{c^2+d^2} \geq ac+bd$;

e) $\dfrac{x}{x^4+y^2}+\dfrac{y}{y^4+x^2} \leq \dfrac{1}{xy}$; f) $a^4+\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{2}{a} \geq 4$.

4 Докажите неравенства для положительных чисел:

a) $\dfrac{a+b}{c}+\dfrac{b+c}{a}+\dfrac{a+c}{b} \geq 6$; b) $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z} \geq \dfrac{9}{x+y+z}$.

5 Докажите неравенство $a^4+b^4+c^4 \geq a^2bc+b^2ca+c^2ab$ для произвольных a, b, c.

6 Какое наименьшее число можно вписать вместо n, чтобы получилось верное неравенство?

a) $n(a^2+b^2+c^2+d^2) \geq ab+ac+ad+bc+bd+cd$;

b) $n(a^2+b^2+c^2+d^2+e^2) \geq ab+ac+ad+ae+bc+bd+be+cd+ce+de$.

7 Докажите неравенство $a^2+b^2+c^2+d^2 \geq a(b+c+d)$ для произвольных a, b, c.

8* Для положительных a, b, c докажите неравенство

$$\frac{1}{a^2+b^2+2c^2}+\frac{1}{b^2+c^2+2a^2}+\frac{1}{c^2+a^2+2b^2} \leq \frac{1}{a^2+b^2+2ab}+\frac{1}{b^2+c^2+2bc}+\frac{1}{c^2+a^2+2ca}.$$