# 9ВМ, спецкурс, занятие 24

**5 апреля 2024**

# *Инверсия-2*

Считаем, что мы работаем с *расширенной плоскостью* (это значит, что мы добавили к плоскости точку $\infty$).

*Обобщенная окружность* – это окружность или прямая.

Обобщенная окружность является прямой в том и только том случае, когда она проходит через точку $\infty$.

Обобщенные окружности касаются, если они имеют одну общую точку (это могут быть параллельные прямые и точка $\infty$).

Факты про инверсию:

- Инверсия с центром $O$ переводит $O \mapsto \infty$ и $\infty \mapsto O$.
- Инверсия переводит обобщенные окружности в обобщенные окружности.
- Инверсия сохраняет касание между обобщенными окружностями.
- Инверсия сохраняет углы между обобщенными окружностями.

**Задачи для разбора.**

$\boxed{\mathbf{1}}$ Докажите, что окружность $S$ при инверсии относительно окружности $\Omega$ переходит в себя тогда и только тогда, когда $S$ и $\Omega$ перпендикулярны (или $S = \Omega$).

*Если в задаче много окружностей, то, сделав инверсию с нужным центром, можно перевести часть их в прямые. Эта операция оставляет касающиеся прямые/окружности касающимися и сохраняет углы между прямыми/окружностями.*

$\boxed{\mathbf{2}}$ В сегмент вписана цепочка окружностей, последовательно касающихся друг друга. Найдите геометрическое место точек их касания.

$\boxed{\mathbf{3}}$ В сегмент вписываются всевозможные пары пересекающихся окружностей, и для каждой пары через точки их пересечения проводится прямая. Докажите, что все эти прямые проходят через одну точку.

$\boxed{\mathbf{4}}$ Даны четыре окружности $S_1$, $S_2$, $S_3$, $S_4$. Пусть $S_1$ и $S_2$ пересекаются в точках $A_1$ и $A_2$, $S_2$ и $S_3$ в точках $B_1$ и $B_2$, $S_3$ и $S_4$ - в точках $C_1$ и $C_2$, $S_4$ и $S_1$ - в точках $D_1$ и $D_2$. Докажите, что если точки $A_1$, $B_1$, $C_1$, $D_1$ лежат на одной окружности $S$ (или прямой), то и точки $A_2$, $B_2$, $C_2$, $D_2$ лежат на одной окружности (или прямой).

$\boxed{\mathbf{5}}$ Через точки $A$ и $B$ проведены окружности $S_1$ и $S_2$, касающиеся окружности $S$, и окружность $S_3$, перпендикулярная $S$. Докажите, что $S_3$ образует равные углы с окружностями $S_1$ и $S_2$.

$\boxed{\mathbf{6}}$ Постройте

$\boxed{\text{a}}$ касательную к данной окружности, проходящую через данную точку;

$\boxed{\text{b}}$ общие касательные к двум данным окружностям.

**Задачи для самостоятельного решения.**

$\boxed{\mathbf{1}}$ Даны четыре окружности, причем $S_1$ и $S_3$ касаются внешним образом окружностей $S_2$ и $S_4$. Докажите, что точки касания лежат на одной окружности.

$\boxed{\mathbf{2}}$ Две окружности, пересекающиеся в точке $A$, касаются окружности (или прямой) $S_1$ в точках $B_1$ и $C_1$, а окружности (или прямой) $S_2$ в точках $B_2$ и $C_2$ (причем касание в $B_2$ и $C_2$ такое же, как в $B_1$ и $C_1$ ). Докажите, что окружности, описанные вокруг треугольников $AB_1C_1$ и $AB_2C_2$, касаются друг друга.

$\boxed{\mathbf{3}}$ Никакие три из четырех точек $A$, $B$, $C$, $D$ не лежат на одной прямой. Докажите, что угол между описанными окружностями треугольников $ABC$ и $ABD$ равен углу между описанными окружностями треугольников $ACD$ и $BCD$.

$\boxed{\mathbf{4}}$ Даны четыре окружности, причем окружности $S_1$ и $S_3$ пересекаются с обеими окружностями $S_2$ и $S_4$. Докажите, что если точки пересечения $S_1$ с $S_2$ и $S_3$ с $S_4$ лежат на одной окружности или прямой, то и точки пересечения $S_1$ с $S_4$ и $S_2$ с $S_3$ лежат на одной окружности или прямой.

*Все построения в этом листочке ведутся с помощью циркуля и линейки*

$\boxed{\mathbf{5}}$ $\boxed{\text{a}}$ Постройте образ данной точки при инверсии относительно данной окружности. Разберите два случая: точка лежит внутри окружности или вне нее.

$\boxed{\text{b}}$ Постройте образ данной прямой/данной окружности при инверсии относительно данной окружности.

$\boxed{\mathbf{6}}$ Проведите через данную точку окружность, перпендикулярную двум данным окружностям.

$\boxed{\mathbf{7}}$ Постройте

$\boxed{\text{a}}$ окружность, проходящую через данную точку и касающуюся двух данных окружностей;

$\boxed{\text{b}}$ окружность, касающуюся трех данных окружностей.

$\boxed{\text{c}}$ Какое максимальное число решений могут иметь задачи a и b?

$\boxed{\mathbf{8}}$ $\boxed{\text{a}}$ Покажите, что существует инверсия, переводящая две непересекающиеся окружности в концентрические.

$\boxed{\text{b}}$ *(Поризм Штейнера)*. Докажите, что если существует цепочка окружностей $S_1, S_2, \ldots, S_n$, каждая из которых касается двух соседних ( $S_n$ касается $S_{n-1}$ и $S_1$ ) и двух данных непересекающихся окружностей $R_1$ и $R_2$, то таких цепочек бесконечно много. А именно, для любой окружности $T_1$, касающейся $R_1$ и $R_2$, существует аналогичная цепочка из $n$ касающихся окружностей $T_1, T_2, \ldots, T_n$.