9ВМ, спецкурс, занятие 23

25 марта 2024

Инверсия

Определение. Пусть дана окружность с центром O и радиусом R. При *инверсии* относительно этой окружности точка A переходит в такую точку A', лежащую на луче $[OA)$, что $OA' = \frac{R^2}{OA}$. Точка O называется *центром инверсии.* Величина R^2 называется *степенью инверсии.*

Часто считается, что точка O переходит в особую точку «∞», в которой пересекаются все прямые.

1 a Какие точки при инверсии остаются на месте?
b Чем является композиция инверсии с самой собой?

2 Точки A и B при инверсии перешли в точки A' и B'.
a Докажите, что треугольники OAB и $OB'A'$ подобны.
b Докажите, что точки A, B, A', B' лежат на одной окружности.
c Докажите, что $A'B' = AB \cdot \frac{R^2}{OA \cdot OB}$.

3 a Прямая ℓ проходит через центр инверсии. Докажите, что инверсия переводит эту прямую в себя.
b Прямая ℓ не проходит через центр инверсии. Докажите, что инверсия переводит эту прямую в окружность, проходящую через центр инверсии.
c Окружность Ω проходит через центр инверсии. Докажите, что инверсия переводит эту окружность в прямую, не проходящую через центр инверсии.
d Окружность Ω не проходит через центр инверсии. Докажите, что инверсия переводит эту окружность в окружность, не проходящую через центр инверсии.

4 Докажите, что касающиеся окружности (или касающаяся окружность и прямая) при инверсии могут перейти либо в касающиеся окружности, либо в касающиеся окружность и прямую, либо в параллельные прямые.

Определение. *Углом между кривыми* называется угол между касательными к этим кривым в точке пересечения.

5 a Докажите, что инверсия сохраняет угол между прямыми. (Т.е. угол между прямыми равен углу между прямыми/окружностями, являющимися образами этих прямых.)
b Докажите, что инверсия сохраняет угол между окружностями/прямой и окружностью.

6 Докажите, что инверсия с центром в вершине A равнобедренного треугольника ABC и степенью AB^2 переводит основание BC треугольника в дугу BC описанной окружности.

7 В сегмент вписана цепочка окружностей, последовательно касающихся друг друга. Найдите геометрическое место точек их касания.
Подсказка: переведите сегмент в угол.

8 В сегмент вписываются всевозможные пары пересекающихся окружностей, и для каждой пары через точки их пересечения проводится прямая. Докажите, что все эти прямые проходят через одну точку.