9ВМ, спецкурс, занятие 21

1 марта 2024

Геометрия в комплексных числах

В этом листочке точки плоскости именуются большими латинскими буквами, а их комплексные координаты – соответствующими маленькими буквами.

Ящик с инструментами

1. Если точка M делит отрезок AB в отношении $AM:MB=x:(1-x)$, то $m=xb+(1-x)a$.

2. $ABCD$ – параллелограмм, если $a+c=b+d$.

3. Число z вещественное тогда и только тогда, когда $z=\overline{z}$. Число z чисто мнимое тогда и только тогда, когда $z=-\overline{z}$.

4. Точка Z лежит на единичной окружности тогда и только тогда, когда $z\overline{z}=1$, т.е. $\overline{z}=\frac{1}{z}$.

5. Расстояние AB вычисляется по формуле $AB^2=|a-b|^2=(a-b)(\overline{a}-\overline{b})$.

6. Ориентированный угол $\angle CAB$ (от AC к AB) равен $\arg\dfrac{b-a}{c-a}$. Угол между векторами $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ равен $\arg\dfrac{b-a}{d-c}$.

7. Точки A, B, C лежат на одной прямой, если $\dfrac{b-a}{c-a}$ – вещественное число, то есть $\dfrac{b-a}{c-a}=\dfrac{\overline{b}-\overline{a}}{\overline{c}-\overline{a}}$. Векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ коллинеарны, если $\dfrac{b-a}{d-c}=\dfrac{\overline{b}-\overline{a}}{\overline{d}-\overline{c}}$.

8. Угол $\angle CAB$ прямой, если $\dfrac{b-a}{c-a}$ – чисто мнимое число. То есть $\dfrac{b-a}{c-a}=-\dfrac{\overline{b}-\overline{a}}{\overline{c}-\overline{a}}$. Векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ перпендикуляны, если $\dfrac{b-a}{d-c}=-\dfrac{\overline{b}-\overline{a}}{\overline{d}-\overline{c}}$.

9. Точки A, B, C, D лежат на одной окружности, если ориентированные углы $\angle CAD$ и $\angle CBD$ равны или их разность равна $\pm 180^\circ$ (разность, чтобы ориентация сходилась). То есть $\dfrac{a-c}{a-d}:\dfrac{b-c}{b-d}$ – вещественное число (оно называется *двойным отношением* точек A, B, C, D).

10. Уравнение прямой, проходящей через точки A, B, имеет вид $(z-a)(\overline{b}-\overline{a})=(\overline{z}-\overline{a})(b-a)$. Если A и B лежат на единичной окружности, то $z+ab\overline{z}=a+b$.

11. Уравнение перпендикуляра, опущенного из точки C на прямую AB имеет вид $(z-c)(\overline{b}-\overline{a})=-(\overline{z}-\overline{c})(b-a)$. Если A и B лежат на единичной окружности, то $z-ab\overline{z}=c-ab\overline{c}$.

12. Уравнение касательной к единичной окружности, проходящей через точку A, имеет вид $\overline{a}z+a\overline{z}=2$.

13. Если точки A, B, C, D лежат на единичной окружности, то прямые AB и CD пересекаются в такой точке Z, что $\overline{z}=\dfrac{(a+b)-(c+d)}{ab-cd}$.

14. Касательные к единичной окружности в точках A и B пересекаются в точке $z=\dfrac{2ab}{a+b}=\dfrac{2}{\overline{a}+\overline{b}}$.

15. Если точки A, B лежат на единичной окружности, то основание перпендикуляра, опущенного из точки M на прямую AB имеет координату $z=\dfrac{1}{2}(-ab\overline{m}+m+a+b)$.

16. Центр тяжести треугольника ABC имеет координату $m=\dfrac{a+b+c}{3}$.

17. Ортоцентр треугольника ABC, вписанного в единичную окружность, имеет координату $h=a+b+c$.

Практические рекомендации

1. Считайте аккуратно. Не делайте два алгебраических преобразования одновременно. К примеру, если надо раскрыть скобки и привести подобные, то сначала раскройте скобки, и только потом приведите подобные. Не экономьте бумагу; не пишите на клочках, полях и в случайных местах страницы.

2. Вводите систему координат как можно проще. Например, треугольник часто стоит брать вписанным в единичную окружность. Или же брать одну из его вершин за 0.

3. Вводите симметричные и однородные обозначения. В финале решения получатся симметричные однородные многочлены, и их легко будет разложить.

4. В финальном тождестве никогда не раскрывайте скобки; наоборот, раскладывайте многочлены на множители.

5. Часто какая-то точка или какое-то условие симметрично зависит от двух стартовых параметров b и c. Попробуйте подставить в координату точки или в уравнение условия $b=c$ или $b=-c$. Если выражение занулилось, то оно делится соответственно на $b-c$ или $b+c$.

6. Если надо преобразовать выражение и преобразовать сопряжённое выражение, то достаточно преобразовать одно из них, а потом навесить сопряжение. В частности, при проверке того, что X, Y, Z лежат на одной прямой, можно до упора упрощать $\dfrac{x-y}{x-z}$, и только потом находить к нему сопряжённое.

7. Иногда сопряжённые точки выражаются простыми формулами, а сами точки — нет. Вместо того, чтобы находить сами точки, можно переписать доказываемое в терминах сопряжённых точек. (Сопряжение – это отражение относительно оси абсцисс, поэтому оно сохраняет практически все хорошие свойства.)

8. То, что точки X, Y, Z лежат на одной прямой, можно записать тремя способами: $\dfrac{y-x}{z-x}\in\mathbb{R}$, $\dfrac{x-y}{z-y}\in\mathbb{R}$, $\dfrac{x-z}{y-z}\in\mathbb{R}$. Выбирайте из них самый удобный.

Пример. В прямоугольнике $ABCD$ на диагональ BD опущен перпендикуляр AH. Точка N – середина DH, точка M – середина BC. Тогда угол ANM прямой.

Доказательство. Введем систему координат так, что ее начало совпадает с центром прямоугольника, оси параллельны сторонам, и вершины прямоугольника лежат на единичной окружности. Тогда $A(a)$, $B(\overline{a})$, $C(-a)$, $D(-\overline{a})$ и $a\overline{a}=1$.

Тогда точка H имеет координату $h=\frac{1}{2}(-\overline{a}(-\overline{a})\overline{a}+a+\overline{a}+(-\overline{a}))=\frac{1}{2}(\overline{a}^3+a)=\frac{a^4+1}{2a^3}$.

Точка M имеет координату $m=\frac{\overline{a}+(-a)}{2}=\frac{1-a^2}{2a}$.

Точка N имеет координату $n=\frac{h+d}{2}=\frac{1}{2}\left(\frac{a^4+1}{2a^3}-\frac{1}{a}\right)=\frac{a^4-2a^2+1}{4a^3}$.

Нужно показать, что $\frac{a-n}{m-n}$ чисто мнимое. Действительно,

$$\frac{a-n}{m-n}=\frac{a-\dfrac{a^4-2a^2+1}{4a^3}}{\dfrac{1-a^2}{2a}-\dfrac{a^4-2a^2+1}{4a^3}}=\frac{3a^4+2a^2-1}{-3a^4+4a^2-1}=\frac{(3a^2-1)(a^2+1)}{-(3a^2-1)(a^2-1)}=\frac{a^2+1}{1-a^2}.$$

Тогда $\overline{\left(\frac{a-n}{m-n}\right)}=\frac{\overline{a}^2+1}{1-\overline{a}^2}=\frac{\dfrac{1}{a^2}+1}{1-\dfrac{1}{a^2}}=\frac{1+a^2}{a^2-1}=-\frac{a-n}{m-n}$, что и требовалось. Значит, $\frac{a-n}{m-n}$ мнимое, $\arg\frac{a-n}{m-n}=\pm 90^\circ$ и $\angle ANM=90^\circ$. □

Пример (теорема Паскаля)**.** Точки пересечения прямых, содержащих противоположные стороны вписанного шестиугольника, лежат на одной прямой.

Доказательство. Пусть это шестиугольник $ABCDEF$, вписанный в единичную окружность: $a\overline{a}=\dots=f\overline{f}=1$. Найдем точки пересечения его сторон: $X=(AB)\cap(DE)$, $Y=(BC)\cap(EF)$, $Z=(CD)\cap(FA)$.

$$\overline{x}=\frac{(a+b)-(d+e)}{ab-de};\quad \overline{y}=\frac{(b+c)-(e+f)}{bc-ef};\quad \overline{z}=\frac{(c+d)-(f+a)}{cd-fa}$$

Вместо того, чтобы доказывать, что на одной прямой лежат X, Y, Z, докажем то же самое про сопряженные точки.

$$\overline{y}-\overline{x}=\frac{(b+c-e-f)(ab-de)-(a+b-d-e)(bc-ef)}{(ab-de)(bc-ef)}=$$

$$=\frac{(b-e)(ab-de-bc+ef)+(c-f)(ab-de)+(d-a)(bc-ef)}{(ab-de)(bc-ef)}=$$

$$=\frac{(b-e)(ab-de-bc+ef)+(bcd+efa-fab-cde)}{(ab-de)(bc-ef)}=\frac{(b-e)(ab-bc+cd-de+ef-fa)}{(ab-de)(bc-ef)}.$$

$$\overline{z}-\overline{y}=\frac{(c-f)(bc-cd+de-ef+fa-ab)}{(bc-ef)(cd-fa)}$$

$$\frac{\overline{z}-\overline{y}}{\overline{y}-\overline{x}}=\frac{(f-c)(ab-de)}{(b-e)(cd-fa)}$$

Если сопрячь это выражение, то выйдет $\dfrac{\left(\frac{1}{f}-\frac{1}{c}\right)\left(\frac{1}{ab}-\frac{1}{de}\right)}{\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{e}\right)\left(\frac{1}{cd}-\frac{1}{fa}\right)}=\dfrac{(f-c)(ab-de)}{(b-e)(cd-fa)}$. От сопряжение выражение не меняется, значит оно вещественное, и точки $\overline{X}$, $\overline{Y}$, $\overline{Z}$ лежат на одной прямой. Значит, X, Y, Z тоже лежат на одной прямой. □

Задачи из этого листочка необходимо считать в комплексных координатах, даже если вы умеете их решать по-другому.

1$^{\vee}_{-}$ Даны два параллелограмма $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$. Докажите, что точки, делящие отрезки AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 в отношении $15:43$, служат вершинами параллелограмма.

2$^{\vee}_{-}$ Точки A и B симметричны относительно центра окружности, точка M лежит на окружности. Докажите, что значение MA^2+MB^2 не зависит от положения M.

3 На сторонах BC и AC треугольника ABC внешним образом построены квадраты $BHFC$ и $CKDA$. Докажите, что медиана CE треугольника ABC равна половине отрезка FK и перпендикулярна ему.

Указание: выберите $c=0$.

4 Докажите, что средние линии четырехугольника равны тогда и только когда, когда его диагонали перпендикулярны.

5 Прямая ℓ касается описанной окружности треугольника ABC в точке B. Точка K — проекция ортоцентра ABC на ℓ.

a Запишите два уравнения на координату k точки K и найдите ее.

b Точка L – середина AC. Докажите, что $LB=LK$.

6 Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность. Докажите, что ортоцентры треугольников ABC, ABD, ACD и BCD лежат на одной окружности.

7 (*Теорема Ньютона*) Четырехугольник $ABCD$ описанный. Докажите, что середины M, N его диагоналей и центр вписанной окружности O лежат на одной прямой.

8 Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность. Из A опускаются перпендикуляры на стороны, её не содержащие: BC и CD, и через их основания A_1, A_2 проводится прямая ℓ_A. Аналогично определяются прямые ℓ_B, ℓ_C и ℓl_D. Докажите, что все эти прямые пересекаются в одной точке T.

Подсказка: не надо искать уравнения прямой ℓ_A и остальных, это неприятно. Лучше найдите координаты a_1, a_2, а затем попробуйте угадать координату t точки T. Пользуйтесь тем, что в выражение для t буквы a, b, c, d должны входить равноправно.

9* Пусть четырёхугольник $ABCD$ - вписанный и пусть E и F - основания перпендикуляров из точки пересечения диагоналей AC и BD на стороны AB и CD, соответственно. Докажите, что EF перпендикулярна прямой, проходящей через середины сторон AD и BC.