9В, спецкурс, занятие 2
4 сентября 2023
Многочлены с целыми коэффициентами

Теорема (о рациональном корне)**.** Пусть $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ — многочлен с целыми коэффициентами и $x = b$ – его целый корень. Тогда $a_0 \,\vdots\, b$.

Пусть $x = \dfrac{p}{q}$ — рациональный корень многочлена $P(x)$ (дробь несократима). Тогда $a_0 \,\vdots\, p$ и $a_n \,\vdots\, q$.

Доказательство. Докажем сразу второе утверждение как более общее. Так как $x = \dfrac{p}{q}$ – корень многочлена, то

$$a_n \left(\frac{p}{q}\right)^n + a_{n-1} \left(\frac{p}{q}\right)^{n-1} + \dots + a_1 \left(\frac{p}{q}\right) + a_0 = 0$$

$$a_n p^n + a_{n-1}p^{n-1}q + a_{n-2}p^{n-2}q^2 + \dots + a_1 p q^{n-1} + a_0 q^n = 0$$

Все слагаемые, кроме последнего, делятся на p, поэтому $a_0 q^n \,\vdots\, p$. Поскольку p и q взаимно просты, то $a_0 \,\vdots\, p$. Аналогично $a_n p^n \,\vdots\, q$ и $a_n \,\vdots\, q$. □

С помощью этой теоремы можно находить все рациональные корни многочлена, просто перебирая делители a_n и a_0. Не забывайте, что эти делители могут быть отрицательными.

$\boxed{\mathbf{0}}$ Решите уравнение $3x^4 + 26x^3 + 36x^2 - 9x - 2 = 0$.

Теорема (целочисленная теорема Безу)**.** Пусть $P(x)$ – многочлен с целыми коэффициентами и a, b – целые числа. Тогда $(P(a) - P(b)) \,\vdots\, (a - b)$.

Доказательство. Следует из того, что $(a^n - b^n) \,\vdots\, (a - b)$. □

Следствие. Пусть $P(x)$ – многочлен с целыми коэффициентами. Если в двух целых точках его значения отличаются на 1, то эти точки сами находятся на расстоянии 1.

Следствие. Неформально: если у многочлена с целыми коэффициентами много целых корней, то значения в остальных целых точках большие.

Например, пусть $n, n+1, \dots, n+9$ – корни многочлена с целыми коэффициентами. Тогда для любого целого a выполняется $P(a) = P(a) - 0 = P(a) - P(n+i) \,\vdots\, (a - n - i)$ для любого i от 0 до 9. То есть $P(a)$ делится на десять каких-то последовательных целых чисел. Из этого можно вывести, что $P(a) \,\vdots\, \text{НОК}(1, 2, \dots, 9) = 2520$.

Задачи, отмеченные галочкой, необходимо сдать в начале занятия в понедельник письменно на листочке.

$\boxed{\mathbf{1}^{\vee}}$ Подберите рациональные корни уравнения, а затем решите его.
$\boxed{\text{a}}$ $x^4+3x^3-10x^2-21x-9=0$; $\boxed{\text{b}}$ $2x^4-5x^3-19x^2+17x+5=0$.

$\boxed{\mathbf{2}}$ Выведите из теоремы от рациональном корне, что для любого целого a, не являющегося точным квадратом, $\sqrt{a}$ иррационально.

$\boxed{\mathbf{3}^{\vee}}$ Про многочлен $P(x)$ с целыми коэффициентами известно, что $P(4)=17$ и уравнение $P(x)=8$ имеет целый корень $x\geq 8$. Найдите этот корень.

$\boxed{\mathbf{4}}$ Дан многочлен с целыми коэффициентами. Если в него вместо неизвестного подставить 2 или 3, то получаются числа, кратные 6. Докажите, что если вместо неизвестного в него подставить 5, то также получится число, кратное 6.

$\boxed{\mathbf{5}}$ Дан многочлен $P(x)$ с целыми коэффициентами. Известно, что $P(1)=2023$, $P(2023)=1$, $P(k)=k$, где k — некоторое целое число. Найдите k.

$\boxed{\mathbf{6}}$ У многочленов $P(x)$ и $Q(x)$ один и тот же набор целых коэффициентов (их порядок различен). Докажите, что разность $P(1543)-Q(1543)$ кратна 771.

$\boxed{\mathbf{7}}$ Докажите, что многочлен $P(x)$ с целыми коэффициентами, который при трёх различных целых значениях x принимает значение 1, не может иметь ни одного целого корня.

$\boxed{\mathbf{8}}$ Многочлен $P(x)$ с целыми коэффициентами при некоторых целых x принимает значения 1, 2 и 3. Доказать, что существует не более одного целого x, при котором значение этого многочлена равно 5.

$\boxed{\mathbf{9}}$ На графике многочлена $P(x)$ с целыми коэффициентами отметили две точки A и B с целыми координатами. Докажите, что если расстояние AB является целым числом, то отрезок AB параллелен оси абсцисс.

$\boxed{\mathbf{10}}$ Несократимая дробь $\frac{p}{q}$ является корнем многочлена $A(x)$ с целыми коэффициентами. Докажите, что $A(x)=(qx-p)B(x)$, где многочлен $B(x)$ тоже имеет целые коэффициенты.

Подсказка: воспользуйтесь индукцией по степени многочлена.