9ВМ, спецкурс, занятие 19
16 февраля 2024
Тригонометрическая форма комплексных чисел

Определение. Пусть Z — точка на комплексной плоскости, соответствующая комплексному числу $z \neq 0$. *Аргументом* $\arg(z)$ числа z называется ориентированный угол между вектором $\overrightarrow{OZ}$ и положительным направлением оси Ox.

Аргумент определен с точностью до 360°.

Пусть $\varphi = \arg(z)$. Тогда $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. Такое представление называется *тригонометрической формой* комплексного числа.

Дальше в этом листочке мы будем обозначать и комплексные числа, и соответствующие точки на плоскости одними и теми же строчными буквами.

Теорема. Пусть $w = \cos\alpha + i\sin\alpha$ – какое-то фиксированное комплексное число, $|w| = 1$. Можно рассмотреть преобразование комплексной плоскости $f(z) = wz$. Это поворот на угол α вокруг начала координат.

Доказательство. Сначала докажем, что это действительно преобразование плоскости (т.е. что это биекция). Действительно, если $z_1 \neq z_2$, то $wz_1 \neq wz_2$, так что это инъекция. И у любого z есть прообраз z/w, так что это сюръекция.

Теперь докажем, что это движение. Действительно, пусть z_1 и z_2 – какие-то две точки на плоскости, расстояние между ними равно $|z_1 - z_2|$. Они переходят в точки wz_1 и wz_2, расстояние между которыми равно $|wz_1 - wz_2| = |w||z_1 - z_2| = |z_1 - z_2|$. То есть расстояние сохраняется, что и требовалось.

Движения бывают следующие: тождественное преобразование (все точки неподвижны), параллельные переносы (нет неподвижных точек), повороты (одна неподвижная точка), зеркальные симметрии (неподвижная прямая), скользящие симметрии (нет неподвижных точек).

У движения $z \mapsto wz$ есть ровно одна неподвижная точка $z = 0$. Значит это поворот вокруг нуля. Поскольку $z = 1$ переходит в w, то это поворот на угол α. $\square$

Следствие. Пусть $w = |w|(\cos\alpha + i\sin\alpha)$. Тогда преобразование $z \mapsto wz$ – это композиция поворота на α вокруг точки 0 и гомотетии с коэффициентом $|w|$ относительно 0. (Такое преобразование называется *поворотной гомотетией.*)

Следствие. При умножении двух комплексных чисел их модули перемножаются, а аргументы складываются. А при делении модули делятся, а аргументы вычитаются.

Следствие. $(\cos\varphi + i\sin\varphi)(\cos\psi + i\sin\psi) = \cos(\varphi+\psi) + i\sin(\varphi+\psi)$. Раскрывая скобки, получаем тригонометрические формулы

$$\cos(\varphi+\psi) = \cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi$$

$$\sin(\varphi+\psi) = \sin\varphi\cos\psi + \cos\varphi\sin\psi$$

$$\cos(\varphi-\psi) = \cos\varphi\cos\psi + \sin\varphi\sin\psi$$

$$\sin(\varphi-\psi) = \sin\varphi\cos\psi - \cos\varphi\sin\psi$$

Следствие (формула Муавра)**.** $(r(\cos\varphi + i\sin\varphi))^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$.

$\boxed{\mathbf{1}^{\veebar}}$ Переведите числа из алгебраической формы в тригонометрическую:

$\boxed{\text{a}}$ $z=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$; $\boxed{\text{b}}$ $z=\sqrt{2}+\sqrt{2}i$; $\boxed{\text{c}}$ $z=-5$;

$\boxed{\text{d}}$ $z=-17i$; $\boxed{\text{e}}$ $z=\sin 30^\circ+i\sin 30^\circ$.

$\boxed{\mathbf{2}^{\veebar}}$ Переведите числа из тригонометрической формы в алгебраическую:

$\boxed{\text{a}}$ $z=3(\cos 30^\circ+i\sin 30^\circ)$; $\boxed{\text{b}}$ $z=2(\cos 135^\circ+i\sin 135^\circ)$.

$\boxed{\mathbf{3}}$ Вычислите:

$\boxed{\text{a}}$ $\dfrac{(\sqrt{2}+i\sqrt{2})^6}{(\sqrt{3}-i)^3}$; $\boxed{\text{b}}$ $(1+i\sqrt{3})^4\cdot(\sqrt{3}+i)^5$; $\boxed{\text{c}}$ $(1+i)^{1543}$; $\boxed{\text{d}}$ $(1-\sqrt{3}i)^{1000}$.

$\boxed{\mathbf{4}}$ Изобразите на комплексной плоскости все значения корней:

$\boxed{\text{a}}$ $\sqrt[4]{-16}$; $\boxed{\text{b}}$ $\sqrt[5]{32i}$; $\boxed{\text{c}}$ $\sqrt[6]{-27i}$; $\boxed{\text{d}}$ $\sqrt[4]{2+2\sqrt{3}i}$.

<u>Подсказка:</u> не забудьте, что аргумент комплексного числа определен неоднозначно.

$\boxed{\mathbf{5}}$ При помощи формулы Муавра выведите формулы для $\cos 2\alpha$, $\sin 2\alpha$, $\cos 3\alpha$, $\sin 3\alpha$.

$\boxed{\mathbf{6}}$ $\boxed{\text{a}}$ Известно, что $z+z^{-1}=2\cos\alpha$. Докажите, что $z^n+z^{-n}=2\cos n\alpha$.

$\boxed{\text{b}}$ Докажите, что $\cos n\alpha$ можно выразить как

$$\cos n\alpha=b_n\cos^n\alpha+b_{n-1}\cos^{n-1}\alpha+\cdots+b_1\cos\alpha+b_0,$$

где b_i – какие-то числа, не зависящие от α.

$\boxed{\mathbf{7}}$ Докажите, что многочлен $x^{2024}+x^{1543}+x^{666}$ делится на x^2+x+1.

<u>Подсказка:</u> разложите x^2+x+1 на множители и воспользуйтесь теоремой Безу.

$\boxed{\mathbf{8}}$ Комплексные корни уравнения z^n-1 называются *корнями n-й степени из единицы.*

$\boxed{\text{a}}$ Запишите их в тригонометрической форме. Где они расположены на комплексной плоскости?

$\boxed{\text{b}}$ Найдите их сумму.

$\boxed{\text{c}}$ Найдите сумму их квадратов.

$\boxed{\text{d}}$ Найдите их произведение.

$\boxed{\mathbf{9}}$ $\boxed{\text{a}}$ Вспомните бином Ньютона. Вспомните, как из него выводятся тождества $C_n^0+C_n^1+C_n^2+\cdots=2^n$ и $C_n^0-C_n^1+C_n^2-\cdots=0$. Вычислите $C_n^0+C_n^2+C_n^4+\ldots$.

$\boxed{\text{b}}$ Вычислите $C_n^0-C_n^2+C_n^4-\ldots$.

$\boxed{\text{c}}$ Вычислите $C_n^0+C_n^4+C_n^8+\ldots$.

$\boxed{\text{d*}}$ Вычислите $C_n^0+C_n^3+C_n^6+\ldots$.