9ВМ, спецкурс, занятие 18
9 февраля 2024
Комплексные числа

Определение. *Компле́ксным числом* называется выражение вида $a+bi$, где a и b — какие-то действительные числа. Сложение и умножение комплексных чисел производится аналогично сложению и умножению многочленов, причем считается, что $i^2=-1$.

Множество комплексных чисел обозначается $\mathbb{C}$. Естественно, $\mathbb{R}\subset\mathbb{C}$ (это те числа, где $b=0$).

Примеры.
- $(2+3i)+(4-5i)=6-2i$
- $(2+3i)-(4-5i)=-2+8i$
- $(2+3i)(4-5i)=8+12i-10i-15i^2=23+2i$

Можно также выполнять деление комплексных чисел методом *неопределенных коэффициентов.* Пусть $\dfrac{2+3i}{4-5i}=a+bi$, тогда $(a+bi)(4-5i)=2+3i$. Если раскрыть скобки, то получится $(4a+5b)+(4b-5a)i=2+3i$, и можно найти a и b из системы

$$\begin{cases}4a+5b=2\\4b-5a=3\end{cases}$$

Получится $a=-\dfrac{7}{41}$; $b=\dfrac{22}{41}$, поэтому $\dfrac{2+3i}{4-5i}=-\dfrac{7}{41}+\dfrac{22}{41}i$.

Определение. Пусть $z=a+bi$ — комплексное число. Тогда $\mathrm{Re}(z)=a$ — его *вещественная часть*, а $\mathrm{Im}(z)=b$ — его *мнимая часть*.

Определение. *Модулем* комплексного числа $z=a+bi$ называется выражение $|z|=\sqrt{a^2+b^2}$.

Сопряженным к комплексному числу $z=a+bi$ называется число $\overline{z}=\overline{a+bi}=a-bi$.

Предложение. Свойства комплексного сопряжения:
- $\overline{\overline{z}}=z$;
- $\overline{z_1+z_2}=\overline{z_1}+\overline{z_2}$;
- $\overline{z_1z_2}=\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}$;
- $\overline{\left(\dfrac{z}{w}\right)}=\dfrac{\overline{z}}{\overline{w}}$.
- $\overline{z}z=|z|^2$;

Последнее свойство позволяет легко делить комплексные числа друг на друга:

$$\frac{z}{w}=\frac{z\overline{w}}{w\overline{w}}=\frac{z\overline{w}}{|w|^2}.$$

Теперь в числителе у нас произведение комплексных чисел, которое вычисляется без проблем, а в знаменателе — действительное число, поделить на которое тоже очень легко.

1$^{\vee}$ Вычислите:

a $(3-2i)+(-2+5i)(7-i)$; b $(1+2i)(2+3i)(3+4i)-(2-i)(3-2i)(4-3i)$;

c $(2-3i)^3$; d $\dfrac{1-5i}{4+3i}-\dfrac{(1+i)^2}{2-i}$; e $i^{1543}+i^{666}+(-i)^{33}$.

2 a Докажите, что $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$.

b Каждое из натуральных чисел n и m представимо в виде суммы двух квадратов. Докажите, что nm тоже представимо в виде суммы двух квадратов.

3 Методом неопределенных коэффициентов найдите

a $\sqrt{i}$; b $\sqrt{3-4i}$; c $\sqrt{12+5i}$.

Напоминание: слова *метод неопределенных коэффициентов* означают, что мы ищем интересующее нас число $\sqrt{i}$ как корень уравнения $z^2=i$. Говорим, что $z=a+bi$, составляем систему на (действительные) числа a и b и решаем ее.

4 Решите уравнения в комплексных числах:

a $z^2+4z+29=0$; b $z^3-1=0$; c $z^2-(3-2i)z+5-5i=0$.

Комплексному числу $z=a+bi$ можно сопоставить точку $Z(a,b)$ на плоскости. В этому случае будем говорить о *комплексной плоскости*, ось абсцисс называть *действительной осью*, а ось ординат – *мнимой осью*.

5 a Выясните геометрический смысл модуля комплексного числа, комплексного сопряжения, сложения и вычитания комплексных чисел.

b Комплексным числам z и w соответствуют точки Z и W на комплексной плоскости. Выразите длину отрезка ZW через z и w (постарайтесь использовать в формуле только сами числа z и w, а не их вещественные и мнимые части).

6 Изобразите на комплексной плоскости множества, задающиеся следующими условиями:

a $|z|\le 1$; b $|z-i|\ge 2$; c $|z|=z$; d $\left|\dfrac{z-1}{z+1}\right|<1$; e $|z-i|+|z+i|=2$.

7 Найдите наименьшее значение $|3+2i-z|$ при $|z|\le 1$.

8 Задайте неравенствами или их системами следующие множества на комплексной плоскости:

a полуплоскость, расположенная строго левее мнимой оси;

b первая координатная четверть, не включая координатных осей;

c множество точек, отстоящих от мнимой оси на расстоянии, меньшем двух;

d полукруг радиуса 1 (без полуокружности) с центром в точке O, расположенный не выше действительной оси.