9ВМ, спецкурс, занятие 16

26 января 2024

Теорема Шаля

Лемма (о двух гвоздях)**.** На плоскости даны такие точки A, B, A', B', что $AB = A'B'$. Существует ровно два движения, переводящие A в A', а B в B'. Одно из них сохраняет ориентацию плоскости, а другое меняет.

Доказательство. Пусть $C \notin (AB)$ – какая-то точка плоскости. Попробуем построить ее образ при движении, которое переводит $A \mapsto A'$, $B \mapsto B'$. Для этого построим окр(A', AC) и окр(B', BC). Так как расстояния при движении сохраняются, то образ C должен попасть на каждую из окружностей.

У этих окружностей две точки пересечения, назовем их C' и C''. Мы можем выбрать одну из них (пусть это C') в качестве образа C, это даст нам два возможных движения. Одно из них сохраняет ориентацию, другое меняет.

Теперь рассмотрим произвольную точку X. Ее образ уже определен однозначно. Действительно, окружности окр(A', AX), окр(B', BX) и окр(C', CX), не могут пересекаться в двух точках, поскольку их центры не лежат на одной прямой. $\square$

Лемма. Любое движение можно представить в виде композиции не более чем трех осевых симметрий.

Доказательство. Как мы только что доказали, любое движение можно задать образами двух точек и информацией о том, сохраняет ли оно ориентацию.

Зафиксируем две произвольные точки A, B и их образы A', B' (причем $AB = A'B'$). Попробуем не более чем двумя симметриями перевести A в A', а B в B'.

1) Если $A = A'$ и $B = B'$, то это победа.

2) Если $A \neq A'$, то рассмотрим серединный перпендикуляр ℓ_1 к отрезку AA'. Тогда S_{ℓ_1} переводит $A \mapsto A'$ и $B \mapsto B''$.

3) Если $B'' = B'$, то это победа, нам хватило одной симметрии.

4) Пусть $B' \neq B''$. Поскольку симметрия является движением, то $A'B' = AB = A'B''$. Точка A' равноудалена от B' и B'', а значит лежит на серединном перпендикуляре ℓ_2 к $B'B''$. Значит, S_{ℓ_2} переводит $A' \mapsto A'$ и $B'' \mapsto B'$. Поэтому композиция $S_{\ell_2} \circ S_{\ell_1}$ переводит $A \mapsto A'$ и $B \mapsto B'$.

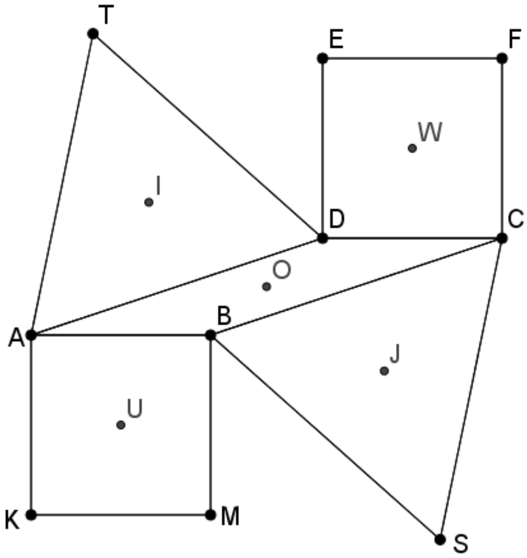
5) Наконец, если у нас не та ориентация, которая должна быть, то изменим ее, сделав еще симметрию $S_{A'B'}$. Интересующие нас точки от этого уже никуда не двинутся. $\square$

Определение. *Скользящей симметрией* называется композиция осевой симметрии относительно прямой l и параллельного переноса на вектор $\vec{n}$, параллельный l.

Теорема (Шаля)**.** Любое движение плоскости, сохраняющее ориентацию, является либо параллельным переносом, либо поворотом.

Любое движение плоскости, меняющее ориентацию, является либо осевой симметрией, либо скользящей симметрией.

1$^{\vee}$ На чертеже изображен параллелограмм, два равносторонних треугольника и два квадрата. У всех фигур отмечены их центры.



Для каждой композиции движений напишите пару точек с этого чертежа, одна из которых переходит в другую под действием этой композиции. (Например, $T_{\overrightarrow{BC}} \circ T_{\overrightarrow{AB}}$ переводит $A \mapsto C$.) Напоминаем, что композиции берутся справа налево, а положительное направление поворота – против часовой стрелки.

a $Z_O \circ Z_W$; b $Z_U \circ T_{\overrightarrow{CD}}$; c $T_{\overrightarrow{BC}} \circ R_I^{120^\circ}$; d $R_B^{90^\circ} \circ R_U^{90^\circ}$ e $R_W^{-90^\circ} \circ Z_O \circ R_J^{120^\circ}$.

2 Найдите композицию осевых симметрий $S_{l_2} \circ S_{l_1}$

a если прямые l_1 и l_2 параллельны (вы это уже делали, но вспомните);

b если прямые l_1 и l_2 пересекаются.

3 a Как представить поворот R_O^α в виде композиции двух симметрий? Есть ли у нас здесь свобода выбора?

b Аналогичный вопрос про параллельный перенос.

4 Найдите композицию $S_l \circ T_{\vec{n}}$ параллельного переноса на вектор $\vec{n}$ и осевой симметрии относительно прямой l

a если $\vec{n} \perp l$; b в общем случае.

<u>Подсказка к a:</u> разложите параллельный перенос в композицию двух осевых симметрий, выбрав одну из осей наиболее удобным способом.

<u>Подсказка к b:</u> разложите вектор $\vec{n}$ на параллельную и перпендикулярную l компоненты.

5 Найдите композицию $S_l \circ R_O^\alpha$ поворота вокруг точки O на α и осевой симметрии относительно прямой l.

6 Докажите теорему Шаля.

7 Из бумаги вырезали два одинаковых треугольника ABC и $A'B'C'$ и положили их на стол, перевернув при этом один из треугольников. Докажите, что середины отрезков AA', BB' и CC' лежат на одной прямой.

8 Найдите композицию $T_{\vec{n}} \circ R_O^\alpha$ поворота и параллельного переноса.

9 Найдите композицию $R_{O_2}^{\alpha_2} \circ R_{O_1}^{\alpha_1}$ двух поворотов с разными центрами. Разберите случаи a $\alpha_1 + \alpha_2 \neq 360^\circ \cdot n$; b $\alpha_1 + \alpha_2 = 360^\circ \cdot n$.