9ВМ, спецкурс, занятие 14

12 января 2024

Движения

Определение. *Преобразованием плоскости* называется любое взаимно-однозначное отображение плоскости в себя.

Определение. *Движением* называется преобразование плоскости, сохраняющее расстояния между всеми парами точек.

Простейшие свойства движений:

- Тождественное преобразование является движением.
- Если отображение f является движением, то и обратное отображение f^{-1} тоже является движением.
- Если отображения f и g являются движениями, то их композиция $g \circ f$ тоже является движением.

Определение. *Параллельным переносом* $T_{\vec{n}}$ на вектор $\vec{n}$ называется преобразование плоскости, переводящее каждую точку A в такую точку A', что $\overrightarrow{AA'} = \vec{n}$.

Определение. *Поворотом* R_O^α вокруг точки O на угол α называется преобразование плоскости, переводящее каждую точку A в такую точку A', что $OA = OA'$ и $\angle AOA' = \alpha$. Угол *ориентированный*, он отсчитывается от луча OA к лучу OA' против часовой стрелки.

Определение. *Центральной симметрией* Z_O относительно точки O называется преобразование плоскости, переводящее каждую точку A в такую точку A', что O — середина отрезка AA'.

Заметим, что $Z_O = R_O^{180^\circ}$.

Определение. *Осевой или зеркальной симметрией* S_l относительно прямой l называется преобразование плоскости, переводящее каждую точку A в такую точку A', что l — серединный перпендикуляр к AA'.

Предложение. Параллельные переносы, повороты и зеркальные симметрии являются движениями.

Определение. Треугольник ABC называется *положительно ориентированным*, если при его обходе против часовой стрелки точки A, B, C следуют друг за другом именно в этом порядке. В противном случае он называется *отрицательно ориентированным.*

Если преобразование плоскости переводит каждый треугольник в треугольник той же ориентации, то оно называется *сохраняющим ориентацию.* А если оно переводит каждый треугольник в треугольник противоположной ориентации, то оно называется *меняющим ориентацию.*

Параллельные переносы и повороты сохраняют ориентацию, а зеркальные симметрии ее меняют.

1 Докажите, что движения переводят [a] прямые в прямые; [b] углы в равные им углы.

2 [a] Докажите, что при параллельном переносе любой вектор $\overrightarrow{AB}$ переходит в равный ему вектор $\overrightarrow{A'B'}$.

[b] Докажите, что центральная симметрия переводит любую прямую в параллельную.

[c] При повороте на угол α прямая l перешла в прямую l'. Докажите, что один из двух углов между l и l' равен α при $0 \leq \alpha < 180°$ и $\alpha - 180°$ при $180° \leq \alpha < 360°$.

3 Найдите композицию [a] двух параллельных переносов $T_{\vec{m}} \circ T_{\vec{n}}$; [b] двух поворотов с общим центром $R_O^\beta \circ R_O^\alpha$; [c] двух центральных симметрий $Z_B \circ Z_A$; [d] двух зеркальных симметрий $S_{\ell_2} \circ S_{\ell_1}$ относительно параллельных прямых $\ell_1 \parallel \ell_2$.

4 Пятиугольник $ABCDE$ правильный. Точки T и S – середины сторон CD и DE соответственно. Найдите угол между отрезками BT и CS.

5 В параллелограмме $ABCD$ расположена точка P. Оказалось, что $\angle PAD = \angle PCD$. Докажите, что $\angle PBC = \angle PDC$.

6 На сторонах треугольника ABC во внешнюю сторону построили равносторонние треугольники ABC', BCA', CAB'.

[a] Докажите, что отрезки AA', BB' и CC' равны и угол между любыми двумя из них равен $60°$.

[b] Докажите, что они пересекаются в одной точке T (она называется *точкой Торричелли*).

7 Окружность пересекает стороны BC, CA, AB треугольника ABC в точках A_1 и A_2, B_1 и B_2, C_1 и C_2 соответственно. Докажите, что если перпендикуляры к сторонам треугольника, проведённые через точки A_1, B_1 и C_1, пересекаются в одной точке, то и перпендикуляры к сторонам, проведённые через точки A_2, B_2 и C_2, тоже пересекаются в одной точке.

8 Точка M лежит на диаметре AB окружности. Хорда CD проходит через M и пересекает AB под углом $45°$. Докажите, что сумма $CM^2 + DM^2$ не зависит от выбора точки M.