9ВМ, спецкурс, занятие 13
22 декабря 2023
Четность перестановок

Определение. Пусть $\sigma \in S_n$ – перестановка. Пара чисел (i, j) называется *инверсией* или *беспорядком* перестановки σ, если $i < j$, но $\sigma(i) > \sigma(j)$.

Количество беспорядков в перестановке называется ее *длиной*, обозначается $\ell(\sigma)$.

Четностью перестановки $\sigma \in S_n$ называется четность $\ell(\sigma)$. Часто говорят еще про *знак* перестановки $\operatorname{sgn}(\sigma) = (-1)^{\sigma}$. Он равен 1 у четных перестановок и -1 у нечетных.

Можно написать два ряда чисел $1, 2, \ldots, n$ один под другим, а затем соединить отрезками каждый i сверху с $\sigma(i)$ снизу. Тогда количество пересечений этих отрезков будет равно $\ell(\sigma)$.

Предложение. Любая транспозиция (a, b) является нечетной перестановкой.

Доказательство. Беспорядками в этой перестановке являются пары (a, i), (i, b), где $a < i < b$, а также (a, b). □

Предложение. Для любых двух перестановок $\sigma, \tau \in S_n$ выполняется $\operatorname{sgn}(\tau \circ \sigma) = \operatorname{sgn}(\tau) \cdot \operatorname{sgn}(\sigma)$.

Доказательство. Напишем друг под другом три ряда чисел $1, 2, \ldots, n$. Соединим верхний ряд со средним в соответствии с перестановкой σ, а средний с нижним в соответствии с перестановкой τ. Теперь уберем средний ряд чисел, получившееся соединение соответствует перестановке $\tau \circ \sigma$. Количество пересечений равно $\ell(\tau) + \ell(\sigma)$.

Возможно, некоторые из линий пересекаются по два раза: сверху и снизу. Такие двойные пересечения можно убрать, заменив линии на совсем не пересекающиеся. Четность количества пересечений от этого не изменится. В итоге получится $\ell(\tau \circ \sigma)$ пересечений, и это число имеет такую же четность, как и $\ell(\tau) + \ell(\sigma)$. Из этого следует требуемое. □

Следствие. Представим перестановку σ в виде композиции нескольких транспозиций. Тогда четность числа этих транспозиций совпадает с четностью σ.

Предложение. В S_n поровну четных и нечетных перестановок (при $n \geq 2$).

Доказательство. Разобьем все перестановки на пары σ, $\sigma \circ (1, 2)$. Из них одна четная, а другая нечетная. □

$\boxed{\mathbf{1}}$ Какая перестановка из S_n самая длинная? Найдите ее длину.

$\boxed{\mathbf{2}}$ Найдите четность и порядок перестановок:
$\boxed{\text{a}}$ $[6, 4, 2, 5, 3, 1]$; $\boxed{\text{b}}$ $[10, 8, 2, 5, 9, 1, 4, 6, 7, 3]$;
$\boxed{\text{c}}$ перестановка из S_{10}, которую вам напишет принимающий.

$\boxed{\mathbf{3}}$ $\boxed{\text{a}}$ Найдите четность цикла $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$.
$\boxed{\text{b}}$ Перестановка представлена в виде произведения нескольких непересекающихся циклов. Как, зная их длины, найти четность перестановки?

$\boxed{\mathbf{4}}$ В городе N разрешены только тройные обмены квартир (по циклу). Однажды выяснилось, что горожане Дилер и Брокер хотят поменяться своими квартирами, а все остальные жители при этом не хотят никуда переезжать. Докажите, что этот план невыполним.

$\boxed{\mathbf{5}}$ Докажите, что любая четная перестановка является произведением нескольких тройных циклов (a, b, c).
<u>Указание:</u> думать в терминах перестановки книг на полке все еще удобно.

$\boxed{\mathbf{6}}$ Игра в 15 представляет собой квадрат 4×4, заполненный квадратными фишками с номерами от 1 до 15. Каждым ходом разрешено двигать на свободное место одну из соседних с ним фишек. Возможно ли из начального расположения (слева) получить за несколько ходов расположение справа?

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	15	14	

<u>Указание:</u> можно думать о происходящем на поле как о перестановках 16 квадратиков: 15 пронумерованных и пустого.

$\boxed{\mathbf{7}}$ Существует ли такая комбинация вращений кубика Рубика, которая
$\boxed{\text{a}}$ меняет местами два угловых кубика, а остальные оставляет на месте?
$\boxed{\text{b}}$ переворачивает один кубик на ребре, а остальные оставляет на месте?
$\boxed{\text{c}}$ Существует ли такая комбинация вращений кубика Рубика, что если повторить ее много раз, то вы получите все возможные состояния кубика?

$\boxed{\mathbf{8^*}}$ Для прохождения теста тысячу мудрецов выстраивают в колонну. Из колпаков с номерами от 1 до 1001 один прячут, а остальные в случайном порядке надевают на мудрецов. Каждый видит только номера на колпаках всех впереди стоящих. Далее мудрецы по порядку от заднего к переднему называют вслух целые числа. Каждое число должно быть от 1 до 1001, причём нельзя называть то, что уже было сказано. Результат теста — число мудрецов, назвавших номер своего колпака. Мудрецы заранее знали условия теста и могли договориться, как действовать. Какой наибольший результат они могут гарантировать?

9ВМ, спецкурс, занятие 13
22 декабря 2023
Четность перестановок

Определение. Пусть $\sigma \in S_n$ – перестановка. Пара чисел (i, j) называется *инверсией* или *беспорядком* перестановки σ, если $i < j$, но $\sigma(i) > \sigma(j)$.

Количество беспорядков в перестановке называется ее *длиной*, обозначается $\ell(\sigma)$.

Четностью перестановки $\sigma \in S_n$ называется четность $\ell(\sigma)$. Часто говорят еще про *знак* перестановки $\operatorname{sgn}(\sigma) = (-1)^\sigma$. Он равен 1 у четных перестановок и -1 у нечетных.

Можно написать два ряда чисел $1, 2, \ldots, n$ один под другим, а затем соединить отрезками каждый i сверху с $\sigma(i)$ снизу. Тогда количество пересечений этих отрезков будет равно $\ell(\sigma)$.

Предложение. Любая транспозиция (a, b) является нечетной перестановкой.

Доказательство. Беспорядками в этой перестановке являются пары (a, i), (i, b), где $a < i < b$, а также (a, b). □

Предложение. Для любых двух перестановок $\sigma, \tau \in S_n$ выполняется $\operatorname{sgn}(\tau \circ \sigma) = \operatorname{sgn}(\tau) \cdot \operatorname{sgn}(\sigma)$.

Доказательство. Напишем друг под другом три ряда чисел $1, 2, \ldots, n$. Соединим верхний ряд со средним в соответствии с перестановкой σ, а средний с нижним в соответствии с перестановкой τ. Теперь уберем средний ряд чисел, получившееся соединение соответствует перестановке $\tau \circ \sigma$. Количество пересечений равно $\ell(\tau) + \ell(\sigma)$.

Возможно, некоторые из линий пересекаются по два раза: сверху и снизу. Такие двойные пересечения можно убрать, заменив линии на совсем не пересекающиеся. Четность количества пересечений от этого не изменится. В итоге получится $\ell(\tau \circ \sigma)$ пересечений, и это число имеет такую же четность, как и $\ell(\tau) + \ell(\sigma)$. Из этого следует требуемое. □

Следствие. Представим перестановку σ в виде композиции нескольких транспозиций. Тогда четность числа этих транспозиций совпадает с четностью σ.

Предложение. В S_n поровну четных и нечетных перестановок (при $n \geq 2$).

Доказательство. Разобьем все перестановки на пары σ, $\sigma \circ (1, 2)$. Из них одна четная, а другая нечетная. □

$\boxed{\mathbf{1}}$ Какая перестановка из S_n самая длинная? Найдите ее длину.

$\boxed{\mathbf{2}}$ Найдите четность и порядок перестановок:
$\boxed{\text{a}}$ [6, 4, 2, 5, 3, 1]; $\boxed{\text{b}}$ [10, 8, 2, 5, 9, 1, 4, 6, 7, 3];
$\boxed{\text{c}}$ перестановка из S_{10}, которую вам напишет принимающий.

$\boxed{\mathbf{3}}$ $\boxed{\text{a}}$ Найдите четность цикла $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$.
$\boxed{\text{b}}$ Перестановка представлена в виде произведения нескольких непересекающихся циклов. Как, зная их длины, найти четность перестановки?

$\boxed{\mathbf{4}}$ В городе N разрешены только тройные обмены квартир (по циклу). Однажды выяснилось, что горожане Дилер и Брокер хотят поменяться своими квартирами, а все остальные жители при этом не хотят никуда переезжать. Докажите, что этот план невыполним.

$\boxed{\mathbf{5}}$ Докажите, что любая четная перестановка является произведением нескольких тройных циклов (a, b, c).
Указание: думать в терминах перестановки книг на полке все еще удобно.

$\boxed{\mathbf{6}}$ Игра в 15 представляет собой квадрат 4×4, заполненный квадратными фишками с номерами от 1 до 15. Каждым ходом разрешено двигать на свободное место одну из соседних с ним фишек. Возможно ли из начального расположения (слева) получить за несколько ходов расположение справа?

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	15	14	

Указание: можно думать о происходящем на поле как о перестановках 16 квадратиков: 15 пронумерованных и пустого.

$\boxed{\mathbf{7}}$ Существует ли такая комбинация вращений кубика Рубика, которая
$\boxed{\text{a}}$ меняет местами два угловых кубика, а остальные оставляет на месте?
$\boxed{\text{b}}$ переворачивает один кубик на ребре, а остальные оставляет на месте?
$\boxed{\text{c}}$ Существует ли такая комбинация вращений кубика Рубика, что если повторить ее много раз, то вы получите все возможные состояния кубика?

$\boxed{\mathbf{8*}}$ Для прохождения теста тысячу мудрецов выстраивают в колонну. Из колпаков с номерами от 1 до 1001 один прячут, а остальные в случайном порядке надевают на мудрецов. Каждый видит только номера на колпаках всех впереди стоящих. Далее мудрецы по порядку от заднего к переднему называют вслух целые числа. Каждое число должно быть от 1 до 1001, причём нельзя называть то, что уже было сказано. Результат теста — число мудрецов, назвавших номер своего колпака. Мудрецы заранее знали условия теста и могли договориться, как действовать. Какой наибольший результат они могут гарантировать?