9ВМ, спецкурс, занятие 12
15 декабря 2023
Перестановки

Определение. *Перестановкой* называется биекция $\sigma\colon \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, n\}$.

Стандарнтые буквы для обозначения перестановок: σ, π, τ или w, v, u.

Множество всех перестановок n-элементного множества обозначается S_n. Естественно $|S_n| = n!$.

Перестановки можно записывать в *двустрочной* нотации: $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ или в *однострочной*: $\sigma = [2, 5, 1, 4, 3]$. На i-том месте стоит $\sigma(i)$.

Перестановки можно *перемножать*, то есть брать их *композицию*. Произведение берется справа налево.

$$[2, 5, 1, 4, 3] \circ [3, 4, 2, 5, 1] = [1, 4, 5, 3, 2]$$

$$[3, 4, 2, 5, 1] \circ [2, 5, 1, 4, 3] = [4, 1, 3, 5, 2]$$

Тождественная перестановка обозначается $e = [1, 2, \ldots, n]$.

К любой перестановке можно взять *обратную*:

$$[2, 5, 1, 4, 3]^{-1} = [3, 1, 5, 4, 2]$$

Определение. Перестановка σ называется *циклом*, если для некоторых $a_1, a_2, \ldots, a_k$ выполняется $\sigma(a_1) = a_2$, $\sigma(a_2) = a_3$, $\ldots$, $\sigma(a_{k-1}) = a_k$, $\sigma(a_k) = a_1$. А для всех остальных элементов x выполняется $\sigma(x) = x$.

Циклы записываются как $\sigma = (a_1, a_2, \ldots, a_k)$. (Не путаем квадратные и круглые скобки.) Есть несколько возможных вариантов записи: $(1, 2, 5, 3) = (2, 5, 3, 1) = (5, 3, 1, 2) = (3, 1, 2, 5)$.

Предложение. Любую перестановку можно представить в виде произведения непересекающихся циклов.

Это становится очевидным, если изобразить перестановку стрелочками $i \mapsto \sigma(i)$.

Порядок циклов в таком произведении не имеет значения (говорят, что циклы *коммутируют*).

$\boxed{\mathbf{1}^{\vee}}$ Вычислите:

$\boxed{\text{a}}$ $[1, 4, 2, 3, 5] \circ [4, 5, 1, 3, 2]$; $\boxed{\text{b}}$ $[2, 7, 5, 3, 4, 1, 6]^{-1}$; $\boxed{\text{c}}$ $[4, 3, 6, 2, 5, 1]^2$.

$\boxed{\mathbf{2}^{\vee}}$ Вычислите степени перестановок:

$\boxed{\text{a}}$ $[3, 1, 2]^{43}$; $\boxed{\text{b}}$ $[4, 2, 1, 3]^{1000}$.

$\boxed{\mathbf{3}^{\vee}}$ Разложите перестановку $[8, 5, 1, 9, 4, 6, 2, 3, 7]$ в произведение непересекающихся циклов.

$\boxed{\mathbf{4}}$ Найдите количество перестановок $\sigma \in S_n$, таких что

$\boxed{\text{a}}$ $\sigma(1) = 1$;

$\boxed{\text{b}}$ четные числа переходят в четные, а нечетные – в нечетные;

$\boxed{\text{c}}$ перестановка представляет собой цикл длины n.

$\boxed{\mathbf{5}}$ Нескольким детям дали по карандашу одного из трех цветов. Дети как-то поменялись карандашами, после чего у каждого оказался не тот карандаш, который был у него вначале. Докажите, что цвета карандашей могли быть такими, что у каждого вначале и в конце карандаши были разных цветов.

$\boxed{\mathbf{6}}$ $\boxed{\text{a}}$ Докажите, что для любой перестановки $\sigma \in S_n$ существует такое число $m \in \mathbb{N}$, что $\sigma^m = e$.

$\boxed{\text{b}}$ Минимальное такое m, что $\sigma^m = e$, называется *порядком* перестановки σ. Как найти порядок перестановки, используя ее разложение в произведение непересекающихся циклов?

$\boxed{\text{c}}$ Какой максимальный порядок перестановки в S_{10}?

$\boxed{\mathbf{7}}$ В ряд выложены 33 карточки с буквами от «А» до «Я». Робот умеет перекладывать их каким-то одним определённым способом, при этом надписи на карточках он не читает. Изначально карточки лежат в алфавитном порядке. Робота запустили 2002 раза, и на 2002 раз впервые все карточки одновременно вернулись на свои места. Докажите, что робота можно запустить ещё несколько раз так, чтобы на своих местах остались ровно 2/3 карточек.

Цикл длиной 2 называется *транспозицией* (иными словами, транспозиция меняет местами два элемента).

$\boxed{\mathbf{8}}$ $\boxed{\text{a}}$ Докажите, что любая перестановка представляется в виде произведения транспозиций.

$\boxed{\text{b}}$ Докажите, что любая перестановка представляется в виде произведения транспозиций соседних элементов $(k, k+1)$.

$\boxed{\text{c}}$ Докажите, что любая перестановка представляется в виде произведения транспозиций $(1, 2), (1, 3), \ldots, (1, n)$.

<u>Указание:</u> проще всего решать эту задачу, думая про перестановку книжных томов на полке.

$\boxed{\mathbf{9}}$ Можно ли придумать такую перестановку $\sigma \in S_{100}$, что

$\boxed{\text{a}}$ $\sigma^2 = (1, 100)$; $\boxed{\text{b}}$ $\sigma^2 = (1, 2, 3, \ldots, 100)$; $\boxed{\text{c}}$ $\sigma^2 = [100, 99, \ldots, 2, 1]$?

$\boxed{\mathbf{10^*}}$ *Спуском* в перестановке σ называется такое i, что $\sigma(i) > \sigma(i+1)$. Найдите количество перестановок из S_n ровно с одним спуском.