9ВМ, спецкурс, занятие 11

8 декабря 2023

Некоторые вероятностные распределения

Определение. Случайные величины X и Y называются *независимыми*, если для любых их значений x, y события $X = x$ и $Y = y$ независимы. То есть $P(X = x, Y = y) = P(X = x)P(Y = y)$.

В частности, независимыми являются индикаторы независимых событий.

Определение. Случайный эксперимент называется *испытанием Бернулли*, если он допускает всего два возможных элементарных исхода («успех» и «неудача»), вероятности которых равны p и $q = 1 - p$.

Случайная величина X имеет *распределение Бернулли* с параметром p, если она принимает только значения 1 и 0 с вероятностями p и $q = 1 - p$ соответственно. $E(X) = p$.

Определение. Пусть мы провели серию из n независимых испытаний Бернулли, в каждом из которых вероятность успеха равна p. Случайная величина Y «количество успехов» имеет *биномиальное распределение*. Записывается $Y \sim \mathrm{Bin}(n, p)$.

Иными словами, пусть $X_1, X_2, \dots, X_n$ – независимые случайные величины, каждая из которых имеет распределение Бернулли с параметром p. Тогда $Y = X_1 + X_2 + \dots + X_n \sim \mathrm{Bin}(n, p)$.

Предложение. Пусть $Y \sim \mathrm{Bin}(n, p)$. Тогда $P(Y = k) = C_n^k p^k (1 - p)^{n-k} = C_n^k p^k q^{n-k}$ для любого k от 0 до n.

Кроме того, $E(Y) = np$.

Определение. Пусть мы проводим серию испытаний Бернулли (с вероятностью успеха p) до первого успеха. Случайная величина Z «количество потребовавшихся для этого испытаний» имеет *геометрическое* распределение. Записывается $Z \sim \mathrm{Geom}(p)$.

Предложение. Пусть $Z \sim \mathrm{Geom}(p)$. Тогда $P(Z = k) = (1 - p)^{k-1} p = q^{k-1} p$.

Кроме того, $E(Z) = \frac{1}{p}$.

Доказательство. Пусть $u = E(Z)$. То есть первого успеха нам нужно в среднем ждать u испытаний. Посмотрим на результат первого испытания. С вероятностью p оно успешно, и нам потребовалось одно испытание. С вероятностью $q = 1 - p$ оно неуспешно и нам потребуется еще в среднем u испытаний до успеха (плюс уже сделанное первое).

Поэтому $u = p \cdot 1 + (1 - p) \cdot (u + 1)$, из чего $u = \frac{1}{p}$. □

$\boxed{\mathbf{1}^{\vee}}$ Кривую монету, шанс выпадения орла на которой равен $p=0{,}6$ кинули 10 раз. С какой вероятностью выпадет 5, 6 или 7 орлов?

$\boxed{\mathbf{2}^{\vee}}$ Кидают 10 раз по две кривые монеты, вероятность выпадения орла на каждой из которых равна $p=0{,}6$. Найдите матожидание количества пар бросков, в которых на обеих монетах выпало одно и то же.

$\boxed{\mathbf{3}^{\vee}}$ $\boxed{\text{a}}$ Игральную кость кидают до тех пор, пока не выпадет шестерка. С какой вероятностью потребуется больше трех бросков?

$\boxed{\text{b}}$ Найдите матожидание числа бросков.

$\boxed{\mathbf{4}}$ Стрелок стреляет по пяти одинаковым мишеням. На каждую мишень дается не более двух выстрелов, и известно, что вероятность поразить мишень каждым отдельным выстрелом равна 0,7. Какова вероятность того, что стрелок поразит ровно четыре мишени из пяти?

$\boxed{\mathbf{5}}$ Стрелок стреляет по трём мишеням до тех пор, пока не собьёт все. Вероятность попадания при одном выстреле равна p.

$\boxed{\text{a}}$ Найдите вероятность того, что потребуется ровно 5 выстрелов.

$\boxed{\text{b}}$ Найдите математическое ожидание числа выстрелов.

$\boxed{\mathbf{6}}$ Вася и Петя договорились сыграть несколько партий в крестики-нолики (на бесконечном листе). Когда один опережает другого на две победы, он объявляется победителем и игра заканчивается. Вероятности выиграть у соперников одинаковые. Ничьих не бывает. Найдите матожидание количества партий.

$\boxed{\mathbf{7}}$ $\boxed{\text{a}}$ Правильную монету кидают до тех пор, пока в двух бросках подряд не выпадет ОР (в таком порядке). Найдите матожидание числа бросков.

Указание: Допустим, в последнем броске выпала решка. Пусть u_p – матожидание числа бросков, которые еще нужно сделать до комбинации ОР. А u_o – матожидание числа бросков, которые еще нужно сделать, если в последнем броске выпал орел. Составьте систему на u_p и u_o.

$\boxed{\text{b}}$ Та же задача для комбинации РР.

$\boxed{\mathbf{8}}$ В страшную грозу по верёвочной лестнице цепочкой поднимаются n гномиков. Если вдруг случится удар грома, то от испуга каждый гномик, независимо от других, может упасть с вероятностью p. Если гномик падает, то он сшибает и всех гномиков, которые находятся ниже. Найдите:

$\boxed{\text{a}}$ вероятность того, что упадёт ровно k гномиков.

$\boxed{\text{b}}$ математическое ожидание числа упавших гномиков.

$\boxed{\mathbf{9*}}$ Есть n-гранная игральная кость, на гранях которой написаны числа от 1 до n. Вероятности выпадения всех граней равны. Кость кидается до тех пор, пока суммарное число выпавших очков не стало больше или равно n. Надйдите матожидание числа бросков.

9ВМ, спецкурс, занятие 11

8 декабря 2023

Некоторые вероятностные распределения

Определение. Случайные величины X и Y называются *независимыми*, если для любых их значений x, y события $X = x$ и $Y = y$ независимы. То есть $P(X = x, Y = y) = P(X = x)P(Y = y)$.

В частности, независимыми являются индикаторы независимых событий.

Определение. Случайный эксперимент называется *испытанием Бернулли*, если он допускает всего два возможных элементарных исхода («успех» и «неудача»), вероятности которых равны p и $q = 1 - p$.

Случайная величина X имеет *распределение Бернулли* с параметром p, если она принимает только значения 1 и 0 с вероятностями p и $q = 1 - p$ соответственно. $E(X) = p$.

Определение. Пусть мы провели серию из n независимых испытаний Бернулли, в каждом из которых вероятность успеха равна p. Случайная величина Y «количество успехов» имеет *биномиальное распределение*. Записывается $Y \sim \mathrm{Bin}(n, p)$.

Иными словами, пусть $X_1, X_2, \ldots, X_n$ – независимые случайные величины, каждая из которых имеет распределение Бернулли с параметром p. Тогда $Y = X_1 + X_2 + \cdots + X_n \sim \mathrm{Bin}(n, p)$.

Предложение. Пусть $Y \sim \mathrm{Bin}(n, p)$. Тогда $P(Y = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k} = C_n^k p^k q^{n-k}$ для любого k от 0 до n.

Кроме того, $E(Y) = np$.

Определение. Пусть мы проводим серию испытаний Бернулли (с вероятностью успеха p) до первого успеха. Случайная величина Z «количество потребовавшихся для этого испытаний» имеет *геометрическое* распределение. Записывается $Z \sim \mathrm{Geom}(p)$.

Предложение. Пусть $Z \sim \mathrm{Geom}(p)$. Тогда $P(Z = k) = (1-p)^{k-1} p = q^{k-1} p$.

Кроме того, $E(Z) = \frac{1}{p}$.

Доказательство. Пусть $u = E(Z)$. То есть первого успеха нам нужно в среднем ждать u испытаний. Посмотрим на результат первого испытания. С вероятностью p оно успешно, и нам потребовалось одно испытание. С вероятностью $q = 1 - p$ оно неуспешно и нам потребуется еще в среднем u испытаний до успеха (плюс уже сделанное первое).

Поэтому $u = p \cdot 1 + (1-p) \cdot (u+1)$, из чего $u = \frac{1}{p}$. □

$\boxed{\mathbf{1}^{\veebar}}$ Кривую монету, шанс выпадения орла на которой равен $p = 0{,}6$ кинули 10 раз. С какой вероятностью выпадет 5, 6 или 7 орлов?

$\boxed{\mathbf{2}^{\veebar}}$ Кидают 10 раз по две кривые монеты, вероятность выпадения орла на каждой из которых равна $p = 0{,}6$. Найдите матожидание количества пар бросков, в которых на обеих монетах выпало одно и то же.

$\boxed{\mathbf{3}^{\veebar}}$ $\boxed{\text{a}}$ Игральную кость кидают до тех пор, пока не выпадет шестерка. С какой вероятностью потребуется больше трех бросков?

$\boxed{\text{b}}$ Найдите матожидание числа бросков.

$\boxed{\mathbf{4}}$ Стрелок стреляет по пяти одинаковым мишеням. На каждую мишень дается не более двух выстрелов, и известно, что вероятность поразить мишень каждым отдельным выстрелом равна 0,7. Какова вероятность того, что стрелок поразит ровно четыре мишени из пяти?

$\boxed{\mathbf{5}}$ Стрелок стреляет по трём мишеням до тех пор, пока не собьёт все. Вероятность попадания при одном выстреле равна p.

$\boxed{\text{a}}$ Найдите вероятность того, что потребуется ровно 5 выстрелов.

$\boxed{\text{b}}$ Найдите математическое ожидание числа выстрелов.

$\boxed{\mathbf{6}}$ Вася и Петя договорились сыграть несколько партий в крестики-нолики (на бесконечном листе). Когда один опережает другого на две победы, он объявляется победителем и игра заканчивается. Вероятности выиграть у соперников одинаковые. Ничьих не бывает. Найдите матожидание количества партий.

$\boxed{\mathbf{7}}$ $\boxed{\text{a}}$ Правильную монету кидают до тех пор, пока в двух бросках подряд не выпадет ОР (в таком порядке). Найдите матожидание числа бросков.

Указание: Допустим, в последнем броске выпала решка. Пусть u_p – матожидание числа бросков, которые еще нужно сделать до комбинации ОР. А u_o – матожидание числа бросков, которые еще нужно сделать, если в последнем броске выпал орел. Составьте систему на u_p и u_o.

$\boxed{\text{b}}$ Та же задача для комбинации РР.

$\boxed{\mathbf{8}}$ В страшную грозу по верёвочной лестнице цепочкой поднимаются n гномиков. Если вдруг случится удар грома, то от испуга каждый гномик, независимо от других, может упасть с вероятностью p. Если гномик падает, то он сшибает и всех гномиков, которые находятся ниже. Найдите:

$\boxed{\text{a}}$ вероятность того, что упадёт ровно k гномиков.

$\boxed{\text{b}}$ математическое ожидание числа упавших гномиков.

$\boxed{\mathbf{9*}}$ Есть n-гранная игральная кость, на гранях которой написаны числа от 1 до n. Вероятности выпадения всех граней равны. Кость кидается до тех пор, пока суммарное число выпавших очков не стало больше или равно n. Надйдите матожидание числа бросков.