9ВМ, спецкурс, занятие 10

2 декабря 2023

Случайные величины

Вернемся к конечным и счетным вероятностным пространствам. Как и раньше, пусть $M=\{m_1, m_2, \ldots\}$ – вероятностное пространство, $P(m_i)$ – вероятности случайных исходов.

Довольно часто нас интересуют не сами случайные исходы, а некоторые их числовые характеристики: выигрыш с лотерейного билета, рост случайно выбранного человека, количество орлов среди десяти брошенных монет... Эти характеристики называются *случайными величинами.*

Определение. *Случайная величина* X – это функция $X\colon M\to\mathbb{R}$.

Случайные величины обозначаются заглавными латинскими буквами. Не путать со всем остальным, что обозначается заглавными латинскими буквами.

Можно рассматривать события «случайная величина X принимает значение a» (это прообразы $X^{-1}(a)\subset M$) и их вероятности $P(X^{-1}(a))$. Обычно пишут просто $P(X=a)$.

Определение. *Распределением* случайной величины X называется множество всех ее значений $\{x_1, x_2, \ldots\}$, про каждое из которых известна его вероятность $p_i=P(X=x_i)$.

Как правило, при изучении случайных величин нужно знать только их распределения, а не природу порождающих их случайных событий.

Пример 1. Кидают две кривые монеты, на каждой из которых решка выпадает с вероятностью 0,4. Найдем распределение случайной величины N_o «число выпавших орлов». Возможные значения этой величины равны 0, 1 и 2.

- $P(N_o=0)=P(pp)=0{,}4^2=0{,}16$;
- $P(N_o=1)=P(op)+P(po)=2\cdot 0{,}4\cdot 0{,}6=0{,}48$;
- $P(N_o=2)=P(oo)=0{,}6^2=0{,}36$.

Определение. *Математическим ожиданием* случайной величины X называется число

$$E(X) = x_1p_1 + x_2p_2 + \ldots$$

(сумма всех возможных значений X, умноженных на их вероятности.)

Часто для краткости говорят *матожидание.*

Пример 2. Найдем матожидание числа выпавших орлов из примера 1.

$$E(N_o) = 0\cdot P(N_o=0) + 1\cdot P(N_o=1) + 2\cdot P(N_o=2) = 0\cdot 0{,}16 + 1\cdot 0{,}48 + 2\cdot 0{,}36 = 1{,}2$$

Смысл математического ожидания следующий: допустим, мы много-много раз проводим случайный опыт, каждый раз вычисляя соответствующее значение X. Тогда среднее арифметическое этих значений будет примерно равняться $E(X)$. Поэтому в задачах на матожидание часто можно встретить формулировки «Найдите среднее значение...»

Предложение. Пусть $M=\{m_1, m_2, \ldots\}$ – все элементарные исходы. Тогда

$$E(X) = X(m_1)P(m_1) + X(m_2)P(m_2) + \ldots$$

$\boxed{\mathbf{1}^{\vee}}$ $\boxed{\text{a}}$ Игральный кубик бросили два раза. Найдите распределение суммы выпавших очков (его удобно оформлять таблицей со строчками «значение случайной величины» и «вероятность этого значения»). Найдите матожидание этой суммы.

$\boxed{\text{b}}$ Та же задача, но рассмотрите произведение очков вместо суммы.

$\boxed{\mathbf{2}^{\vee}}$ В программе зачета 30 вопросов, из которых Петя выучил только 20. В билет входят 3 случайных вопроса из программы.

$\boxed{\text{a}}$ Найдите распределение числа вопросов, на которые Петя сможет ответить.

$\boxed{\text{b}}$ Найдите матожидание Петиной оценки (5 ставится за три рассказанных вопроса, 4 за два, 3 за один).

$\boxed{\mathbf{3}}$ Докажите свойства математического ожидания:

$\boxed{\text{a}}$ Существуют такие $m, n \in M$, что $X(m) \leq E(X)$ и $X(n) \geq E(X)$.

$\boxed{\text{b}}$ Математическое ожидание *линейно*: для любых двух случайных величин X, Y (заданных на одном вероятностном пространстве M) выполняется $E(X+Y) = E(X) + E(Y)$.

Кроме того, для любого числа a выполняется $E(aX) = aE(X)$.

$\boxed{\mathbf{4}}$ Бросили три дайса для игры Dungeons&Dragons: икосаэдр d20, на гранях которого написаны числа от 1 до 20, додэкаэдр d12, на гранях которого написаны числа от 1 до 12 и октаэдр d8, на гранях которого написаны числа от 1 до 8. Найдите матожидание суммы выпавших очков.

Определение. Случайная величина I_A называется *индикатором* события $A \subset M$, если $I_A(m) = \begin{cases} 1, & m \in A \\ 0, & n \notin A \end{cases}$. Легко видеть, что $E(I_A) = P(A)$. Случайная величина «количество случившихся событий из набора $A_1, A_2, \ldots$» равна сумме их индикаторов $I_{A_1} + I_{A_2} + \ldots$

$\boxed{\mathbf{5}}$ Есть фиксированный набор из n вершин. *Случайный граф* рисуют, проводя каждое из возможных ребер с вероятностью $1/2$ (все ребра проводятся независимо друг от друга).

$\boxed{\text{a}}$ Найдите матожидание количества ребер в случайном графе.

$\boxed{\text{b}}$ Найдите матожидание количества треугольников в случайном графе.

$\boxed{\mathbf{6}}$ У дежурной в гостинице есть доска с n ключами. Каждый ключ имеет номер и висит на своём крючке с таким же номером. Однажды доска упала, и все ключи рассыпались. Дежурная собрала ключи, но в спешке развесила их в случайном порядке. Каково математическое ожидание числа ключей, которые оказались на своих крючках?

$\boxed{\mathbf{7}}$ В двух одинаковых додекаэдрах отметили по 9 вершин (из 20). Докажите, что можно так совместить эти додекаэдры, что не меньше 5 отмеченных вершин второго додекаэдра совпадут с отмеченными вершинами первого.

$\boxed{\mathbf{8}}$ Внутри правильного пятиугольника $ABCDE$ площади 1 отмечается случайная точка X. Найдите матожидание площади треугольника XAB.

Замечание: мы пока не знаем, как считается матожидание в случае несчетного вероятностного пространства. Но давайте поверим, что все свойства матожидания, которых естественно ожидать, действительно будут выполняться и в этом случае.

9ВМ, спецкурс, занятие 10
2 декабря 2023
Случайные величины

Вернемся к конечным и счетным вероятностным пространствам. Как и раньше, пусть $M = \{m_1, m_2, \ldots\}$ – вероятностное пространство, $P(m_i)$ – вероятности случайных исходов.

Довольно часто нас интересуют не сами случайные исходы, а некоторые их числовые характеристики: выигрыш с лотерейного билета, рост случайно выбранного человека, количество орлов среди десяти брошенных монет... Эти характеристики называются *случайными величинами.*

Определение. *Случайная величина* X – это функция $X\colon M \to \mathbb{R}$.

Случайные величины обозначаются заглавными латинскими буквами. Не путать со всем остальным, что обозначается заглавными латинскими буквами.

Можно рассматривать события «случайная величина X принимает значение a» (это прообразы $X^{-1}(a) \subset M$) и их вероятности $P(X^{-1}(a))$. Обычно пишут просто $P(X = a)$.

Определение. *Распределением* случайной величины X называется множество всех ее значений $\{x_1, x_2, \ldots\}$, про каждое из которых известна его вероятность $p_i = P(X = x_i)$.

Как правило, при изучении случайных величин нужно знать только их распределения, а не природу порождающих их случайных событий.

Пример 1. Кидают две кривые монеты, на каждой из которых решка выпадает с вероятностью 0,4. Найдем распределение случайной величины N_o «число выпавших орлов». Возможные значения этой величины равны 0, 1 и 2.

- $P(N_o = 0) = P(pp) = 0{,}4^2 = 0{,}16$;
- $P(N_o = 1) = P(op) + P(po) = 2 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}6 = 0{,}48$;
- $P(N_o = 2) = P(oo) = 0{,}6^2 = 0{,}36$.

Определение. *Математическим ожиданием* случайной величины X называется число

$$E(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \ldots$$

(сумма всех возможных значений X, умноженных на их вероятности.)

Часто для краткости говорят *матожидание.*

Пример 2. Найдем матожидание числа выпавших орлов из примера 1.

$$E(N_o) = 0 \cdot P(N_o = 0) + 1 \cdot P(N_o = 1) + 2 \cdot P(N_o = 2) = 0 \cdot 0{,}16 + 1 \cdot 0{,}48 + 2 \cdot 0{,}36 = 1{,}2$$

Смысл математического ожидания следующий: допустим, мы много-много раз проводим случайный опыт, каждый раз вычисляя соответствующее значение X. Тогда среднее арифметическое этих значений будет примерно равняться $E(X)$. Поэтому в задачах на матожидание часто можно встретить формулировки «Найдите среднее значение...»

Предложение. Пусть $M = \{m_1, m_2, \ldots\}$ – все элементарные исходы. Тогда

$$E(X) = X(m_1)P(m_1) + X(m_2)P(m_2) + \ldots$$

$\boxed{\mathbf{1}^{\vee}}$ $\boxed{\text{a}}$ Игральный кубик бросили два раза. Найдите распределение суммы выпавших очков (его удобно оформлять таблицей со строчками «значение случайной величины» и «вероятность этого значения»). Найдите матожидание этой суммы.

$\boxed{\text{b}}$ Та же задача, но рассмотрите произведение очков вместо суммы.

$\boxed{\mathbf{2}^{\vee}}$ В программе зачета 30 вопросов, из которых Петя выучил только 20. В билет входят 3 случайных вопроса из программы.

$\boxed{\text{a}}$ Найдите распределение числа вопросов, на которые Петя сможет ответить.

$\boxed{\text{b}}$ Найдите матожидание Петиной оценки (5 ставится за три рассказанных вопроса, 4 за два, 3 за один).

$\boxed{\mathbf{3}}$ Докажите свойства математического ожидания:

$\boxed{\text{a}}$ Существуют такие $m, n \in M$, что $X(m) \leq E(X)$ и $X(n) \geq E(X)$.

$\boxed{\text{b}}$ Математическое ожидание *линейно*: для любых двух случайных величин X, Y (заданных на одном вероятностном пространстве M) выполняется $E(X+Y) = E(X) + E(Y)$.

Кроме того, для любого числа a выполняется $E(aX) = aE(X)$.

$\boxed{\mathbf{4}}$ Бросили три дайса для игры Dungeons&Dragons: икосаэдр d20, на гранях которого написаны числа от 1 до 20, додэкаэдр d12, на гранях которого написаны числа от 1 до 12 и октаэдр d8, на гранях которого написаны числа от 1 до 8. Найдите матожидание суммы выпавших очков.

Определение. Случайная величина I_A называется *индикатором* события $A \subset M$, если $I_A(m) = \begin{cases} 1, & m \in A \\ 0, & n \notin A \end{cases}$. Легко видеть, что $E(I_A) = P(A)$. Случайная величина «количество случившихся событий из набора $A_1, A_2, \ldots$» равна сумме их индикаторов $I_{A_1} + I_{A_2} + \ldots$

$\boxed{\mathbf{5}}$ Есть фиксированный набор из n вершин. *Случайный граф* рисуют, проводя каждое из возможных ребер с вероятностью $1/2$ (все ребра проводятся независимо друг от друга).

$\boxed{\text{a}}$ Найдите матожидание количества ребер в случайном графе.

$\boxed{\text{b}}$ Найдите матожидание количества треугольников в случайном графе.

$\boxed{\mathbf{6}}$ У дежурной в гостинице есть доска с n ключами. Каждый ключ имеет номер и висит на своём крючке с таким же номером. Однажды доска упала, и все ключи рассыпались. Дежурная собрала ключи, но в спешке развесила их в случайном порядке. Каково математическое ожидание числа ключей, которые оказались на своих крючках?

$\boxed{\mathbf{7}}$ В двух одинаковых додекаэдрах отметили по 9 вершин (из 20). Докажите, что можно так совместить эти додекаэдры, что не меньше 5 отмеченных вершин второго додекаэдра совпадут с отмеченными вершинами первого.

$\boxed{\mathbf{8}}$ Внутри правильного пятиугольника $ABCDE$ площади 1 отмечается случайная точка X. Найдите матожидание площади треугольника XAB.

<u>Замечание:</u> мы пока не знаем, как считается матожидание в случае несчетного вероятностного пространства. Но давайте поверим, что все свойства матожидания, которых естественно ожидать, действительно будут выполняться и в этом случае.