

# 9ВМ, спецкурс, занятие 9

24 ноября 2023

## Геометрическая вероятность

Напоминаем, что говорить о вероятности можно только в том случае, если мы раз за разом повторяем один и тот же «эксперимент», который может иметь различные *элементарные исходы*.

Множество всех элементарных исходов  $X$  называется *вероятностным пространством*. *Событиями* называются подмножества  $X$ . Для каждого события  $A \subset X$  определена его вероятность  $P(A) \in [0, 1]$ .

Вероятность должна обладать следующими свойствами:

- $P(X) = 1, P(\emptyset) = 0$ .
- Если  $A \cap B = \emptyset$ , то  $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ .

В случае конечных или счетных вероятностных пространств вероятность события равняется сумме вероятностей входящих в это событие элементарных исходов. С несчетными же пространствами ситуация несколько иная.

**Задача 1.** Мишень имеет форму квадрата со стороной 2, в который вписан круг радиуса 1. Игрок в дартс с равной вероятностью попадает в любое место мишени (и не промахивается мимо нее). С какой вероятностью он попадет внутрь круга?

Вероятность попасть в каждую конкретную точку, очевидно, равна 0. Точек в круге континуум. Сложение континуума нулей... явно не приведет нас к победе.

Наша интуиция подсказывает другой подход. Площадь квадрата равна 4, площадь круга равна  $\pi \cdot 1^2$ . Тогда вероятность попасть внутрь круга равняется  $\pi/4$ .

Замечание: фразу «с равной вероятностью попадает в любое место мишени» следует воспринимать как «если две области  $A$  и  $B$  на мишени равны, то и вероятности попадания в них одинаковы.»

**Определение.** Если вероятностное пространство  $X$  представляет плоскую фигуру, а элементарный исход выбирается равновероятно (см. замечание), то вероятность события  $A$  пропорциональна его площади  $S_A$ . А именно  $P(A) = \frac{S_A}{S_X}$ .

В случае других размерностей вместо площади берут длину или объем.

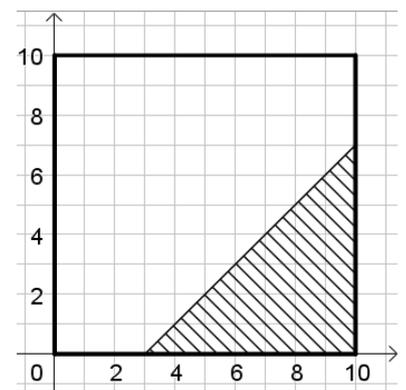
Формулировки вида «в квадрате выбрана случайная точка» подразумевают равновероятность выбора, если не сказано обратного.

**Задача 2.** Маша и Катя независимо друг от друга загадали по случайному числу (не обязательно целому) из промежутка  $[0, 10]$ . С какой вероятностью Машино число будет больше Катиного хотя бы на 3?

**Решение.** Пусть Машино число – это  $x$ , а Катино – это  $y$ . Тогда задачу можно перефразировать так: в квадрате  $[0, 10] \times [0, 10]$  случайным образом выбрана точка  $(x, y)$ . С какой вероятностью  $x - y \geq 3$ ?

Изобразим этот квадрат и заштрихуем его часть, удовлетворяющую этому неравенству. Считая площади, получим, что

$$p = \frac{7^2/2}{10^2} = \frac{49}{200} = 0,245.$$



1<sup>v</sup> В треугольнике  $ABC$   $AB=3$ ,  $AC=5$ . В нем провели медиану  $AM$  и биссектрису  $AL$ . С какой вероятностью случайно выбранная точка в треугольнике  $ABC$  попадет в треугольник  $AML$ ?

2<sup>v</sup> На окружности случайно и независимо друг от друга выбрали две точки  $A$  и  $B$ . С какой вероятностью расстояние между ними больше радиуса окружности?

Замечание: окружность симметричная, и нас интересует только взаимное расположение двух точек, а не их конкретные места. Так что можно считать, что  $A$  – верхняя точка окружности.

3<sup>v</sup> В центр прямоугольного листа бумаги  $10 \times 15$  см Буратино посадил круглую кляксу радиусом 1 см. А затем он посадил на этот лист еще одну такую же кляксу (за границы листа она не вылезла). С какой вероятностью две кляксы перекрываются?

4 Анна Алексеевна хочет выдать ученикам 9В индивидуальные домашние задания. Для этого она написала программу, которая генерирует квадратные уравнения  $x^2 - bx + c^2 = 0$ , выбирая числа  $b$  и  $c$  случайным образом из отрезка  $[0, 1]$ . С какой вероятностью получившееся уравнение будет иметь корни?

5 Оля и Ваня договорились сходить погулять. Каждый из них приходит на место встречи в случайное время между 18:00 и 19:00, ждет 10 минут, а затем уходит. С какой вероятностью они все-таки встретятся?

6 а В окружность вписан равносторонний треугольник  $ABC$ . На этой окружности случайно и независимо выбираются две точки  $X$  и  $Y$ . С какой вероятностью отрезок  $XY$  пересечет треугольник?

б Та же задача, только треугольник  $ABC$  имеет углы  $30^\circ$ ,  $60^\circ$ ,  $90^\circ$ .

7 На окружности случайно и независимо друг от друга выбираются точки  $A$ ,  $B$ ,  $C$ . С какой вероятностью треугольник  $ABC$  остроугольный?

8 Прямую палку случайным образом ломают на три части. С какой вероятностью из этих частей можно сложить треугольник? Разберите следующие способы ломания:

а Две точки разлома выбираются на палке случайно и независимо друг от друга.

б Первая точка разлома выбирается случайно. Затем из двух половин берется большая и на ней случайным образом выбирается вторая точка разлома.

в Первая точка разлома выбирается случайно. Затем из двух половин случайным образом выбирается одна (вероятность выбрать каждую из половин равна  $1/2$ ) и на выбранной половине случайным образом выбирается вторая точка разлома.

9\* У одного племени был странный обычай — перед началом сезона дождей шаман подбрасывал вверх цепочку из трёх тонких одинаковых прутиков, причем соседние прутья могли свободно вращаться друг относительно друга. Прутья падали на песок, образуя ломаную из трех звеньев. Если ломаная образовывала самопересечение, то считалось, что племя в наступающем году ждут неурожай и болезни. Если же самопересечения не было, то год обещал быть сытным и счастливым. Найдите вероятность того, что на следующий год прутья напроорочат удачу.