

9В, спецкурс, занятие 1

4 сентября 2023

Вспоминаем многочлены

1 Вспомните, как делить многочлены с остатком. Пользуясь алгоритмом Евклида, найдите $\text{НОД}(P(x), Q(x))$.

$$P(x) = x^3 + 4x^2 + 7x + 4, Q(x) = x^4 + 5x^3 + 10x^2 + 8x.$$

2 Найдите все натуральные n , при которых число $n^3 + 2n^2 + 4n + 3$ делится на число $n^2 + 1$.

Теорема (Безу). Остаток от деления многочлена $P(x)$ на $x - a$ равен $P(a)$.

Следствие. Многочлен $P(x)$ делится на $x - a$ тогда и только тогда, когда $P(a) = 0$ (то есть a — корень многочлена $P(x)$).

Следствие. У многочлена степени n не может быть больше n корней.

3 При каком значении a многочлен $x^{100500} + ax^{1543} + 7$ делится на $x + 1$?

4 Найдите остаток от деления многочлена $x^{2024} + x + 2$ на $x^2 - 1$.

5 **а** Докажите, что $P(x)$ делится на $(x - 1)$ тогда и только тогда, когда сумма всех коэффициентов $P(x)$ равна 0.

б Найдите сумму всех коэффициентов многочлена $P(x) = (2 + 3x - 4x^2)^{248} (1 - 7x + 5x^2)^{345}$.

с Про многочлен $P(x)$ с целыми коэффициентами известно, что он делится на $x^3 - 4x + 13$. На какую цифру оканчивается сумма всех его коэффициентов?

6 Придумайте такой многочлен $P(x)$ степени 1543, что **а** $P(x) + P(-x) = 1$;

б $P(x) + P(2 - x) = 1$.

7 **а** Приведите пример такого многочлена $P(x)$ ненулевой степени, что $P(x^2 + 4x + 2)$ делится на $P(x)$.

б Существует ли такой многочлен $P(x)$ степени 1000?

8 Пусть у квадратного трехчлена $f(x) = x^2 + px + q$ есть два различных корня. Может ли так оказаться, что у многочлена $f(f(x))$ ровно три различных корня, а у многочлена $f(f(f(x)))$ ровно 7 различных корней?