# 9 математический класс 1543. Алгебра.
# 13 апреля 2024

Если у бесконечной геометрической прогрессии $|q| < 1$, то такая прогрессия называется *бесконечно убывающей.*

Пусть $b_1$, $b_2$, $b_3$ – бесконечно убывающая геометрическая прогрессия. Рассмотрим ее частичные суммы

$$S_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n = b_1 \frac{q^n - 1}{q - 1} = b_1 \frac{1 - q^n}{1 - q}.$$

Поскольку $|q| < 1$, то $q^n$ с ростом $n$ становится все ближе и ближе к нулю. Можно взять достаточно большой $n$ и сделать $|q^n|$ меньше любого наперед заданного числа. Поэтому можно сказать, что при $n \to \infty$ значение $q^n \to 0$ и $S_n \to \dfrac{b_1}{1-q}$.

Это выражение называется *суммой бесконечно убывающей геометрической прогрессии*:

$$b_1 + b_2 + b_3 + \cdots = \frac{b_1}{1 - q}.$$

Учтите, что при $|q| \geq 1$ ни о какой бесконечной сумме прогрессии речи идти не может.

**1** Найдите сумму a) $1 + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{16} + \ldots$; b) $18 + 12 + 8 + \dfrac{16}{3} + \dfrac{32}{9} + \ldots$; c) $\dfrac{3}{5} - \dfrac{9}{25} + \dfrac{27}{125} - \ldots$; d) $\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{9} + \dfrac{1}{8} - \dfrac{1}{27} + \ldots$.

**2** Переведите в обыкновенную дробь, используя формулу суммы бесконечной геометрической прогрессии: a) 0,(12); b) 1,4(63).

**3** В бесконечной геометрической прогрессии $b_1, b_2, \ldots$ знаменатель равен $q$, причем $|q| < 1$. Выразите через $b_1$ и $q$ суммы

a) $b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + \ldots$; b) $(b_1 - b_2)^2 + (b_3 - b_4)^2 + (b_5 - b_6)^2 + \ldots$;

c) $\left(b_1 + \dfrac{1}{2}\right) + \left(2b_2 - \dfrac{1}{4}\right) + \left(4b_3 + \dfrac{1}{8}\right) + \left(8b_4 - \dfrac{1}{16}\right) + \ldots$ (здесь $|q| < \frac{1}{2}$).

**4** Первый член бесконечной геометрической прогрессии относится к сумме второго и третьего членов как 9:10. Найдите первый член прогрессии если ее сумма равна 12.

**5** Сумма членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии равна 1,5, а сумма квадратов ее членов равна 1,125. Найдите первый член и знаменатель прогрессии.

**6** Найдите сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии, если сумма её членов, взятых через один, начиная со второго, равна 2, а сумма её членов, взятых через один, начиная с третьего, равна 1.

**7** Найдите первый член и знаменатель бесконечно убывающей геометрической прогрессии, если отношение суммы кубов всех её членов к сумме всех членов этой прогрессии равно $\dfrac{48}{7}$, а отношение суммы четвертых степеней членов к сумме квадратов членов этой прогрессии равно $\dfrac{144}{17}$.

**8** Найдите сумму бесконечной геометрической прогрессии, второй член которой, удвоенное произведение первого члена на четвертый и третий член образуют в указанном порядке арифметическую прогрессию с разностью, равной $\dfrac{1}{3}$.

**9** Имеются 100 бесконечных геометрических прогрессий, каждая из которых состоит из натуральных чисел. Может ли оказаться, что каждое натуральное число содержится хотя бы в одной из этих прогрессий?

**10*** Вычислите

a) $\dfrac{1}{2} + \dfrac{2}{4} + \dfrac{3}{8} + \dfrac{4}{16} + \dfrac{5}{32} + \ldots$; b) $\dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{4} + \dfrac{6}{8} + \dfrac{10}{16} + \dfrac{15}{32} + \dfrac{21}{64} + \ldots$; c) $\dfrac{1}{2} + \dfrac{4}{4} + \dfrac{9}{8} + \dfrac{16}{16} + \dfrac{25}{32} + \ldots$;

# Домашнее задание. 13 апреля → 16 апреля

$\boxed{\mathbf{1}}$ Сторона равностороннего треугольника равна $a$. На высоте его построен новый равносторонний треугольник. На высоте нового треугольника построен еще равносторонний треугольник и т. д. Найдите сумму периметров и сумму площадей всех этих треугольников.

$\boxed{\mathbf{2}}$ Переведите 0,2(033) в обыкновенную дробь.

$\boxed{\mathbf{3}}$ В бесконечной геометрической прогрессии $b_1, b_2, \ldots$ знаменатель равен $q$, причем $|q| < 1$. Выразите через $b_1$ и $q$ сумму $(b_1 + b_2 + b_3)^3 + (b_3 + b_4 + b_5)^3 + (b_5 + b_6 + b_7)^3 + \ldots;$

$\boxed{\mathbf{4}}$ Сумма бесконечной геометрической прогрессии равна 4, а сумма кубов ее членов равна $9\frac{1}{7}$. Найдите сумму квадратов членов этой прогрессии.

$\boxed{\mathbf{5}}$ Дана бесконечно убывающая геометрическая прогрессия. Сумма всех её членов с нечётными номерами на 2 больше, чем сумма всех членов с чётными номерами. А разность между суммой квадратов всех членов на нечётных местах и суммой квадратов всех членов на чётных местах равна $\frac{36}{5}$. Найдите первый член и знаменатель прогрессии.

$\boxed{\mathbf{6}}$ Две бесконечно убывающие геометрические прогрессии таковы, что первый член первой прогрессии является знаменателем второй, а знаменатель первой прогрессии является первым членом второй прогрессии. Отношение суммы первой прогрессии к сумме квадратов всех ее членов равно $\frac{8}{3}$, а такое же отношение для второй прогрессии равно 4,5. Найдите сумму каждой из этих прогрессий.