

9 математический класс 1543. Алгебра.
16 декабря 2023

Сегодня мы докажем, что любой симметрический многочлен от переменных x, y, z можно выразить через $e_1 = x + y + z$, $e_2 = xy + yz + zx$, $e_3 = xyz$.

1 **а** Докажите *тождества* Ньютона: $s_k = e_1 s_{k-1} - e_2 s_{k-2} + e_3 s_{k-3}$, где $s_k = x^k + y^k + z^k$ – *степенные суммы*.

б Докажите по индукции, что любую степенную сумму $x^k + y^k + z^k$ можно выразить через e_1, e_2, e_3 .

Орбитой одночлена называется сумма всевозможных одночленов, полученных из него перестановками переменных.

$$O(xyz) = xyz$$

$$O(x^2) = x^2 + y^2 + z^2$$

$$O(x^3 y^2 z) = x^3 y^2 z + x^3 z^2 y + y^3 x^2 z + y^3 z^2 x + z^3 x^2 y + z^3 y^2 x$$

Любой симметрический многочлен является суммой каких-то орбит.

2 Докажите, что любую орбиту можно выразить через степенные суммы. Разберите случаи:

а $O(x^k y^l)$, где $k > l$; **б** $O(x^k y^k)$; **в** $O(x^k y^l z^m)$, где $k \geq l \geq m > 0$.

3 Решите уравнения, заменой сведя их к симметрической системе:

а $z^4 + (1 - z)^4 = 1$; **б** $\sqrt[3]{8+x} + \sqrt[3]{8-x} = 1$; **в** $x \cdot \frac{19-x}{x+1} \cdot \left(x + \frac{19-x}{x+1}\right) = 84$.

4 Найдите все значения параметра a , для каждого из которых многочлен $x^3 - 6x^2 + ax + a$ имеет три корня x_1, x_2, x_3 , удовлетворяющие равенству

$$(x_1 - 3)^3 + (x_2 - 3)^3 + (x_3 - 3)^3 = -33.$$

5 Разложите на множители $a^3(b+c) + b^3(c+a) + c^3(a+b) + abc(a+b+c)$.

6 Решите системы уравнений:

$$\text{а} \begin{cases} x + y + z = 2 \\ (x+y)(y+z) + (y+z)(z+x) + (z+x)(x+y) = 1 \\ x^2(y+z) + y^2(z+x) + z^2(x+y) = -6 \end{cases} \quad \text{б}^* \begin{cases} x^5 + y^5 + z^5 - u^5 = -150 \\ x^3 + y^3 + z^3 - u^3 = -9 \\ x^2 + y^2 + z^2 - u^2 = 2 \\ x + y + z - u = 0 \end{cases}$$

Домашнее задание. 16 декабря → 19 декабря

1 Решите уравнение $x + \sqrt{17-x^2} + x\sqrt{17-x^2} = 9$.

2 Решите систему
$$\begin{cases} xy + xz + yz = 11, \\ xy(x+y) + yz(y+z) + zx(z+x) = 48, \\ xy(x^2+y^2) + yz(y^2+z^2) + zx(z^2+x^2) = 118 \end{cases}$$

3 У многочлена $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ три корня: x_1, x_2, x_3 . Составьте уравнение, корнями которого являются $x_1 x_2, x_2 x_3, x_3 x_1$.

4 Постройте график функции $y = 4|x+6| - x^2 - 11x - 30$ и определите, при каких значениях m прямая $y = m$ имеет с графиком данной функции три общие точки.

5 Решите неравенство $(3x-2)(x+4) > -11$. Не забудьте нарисовать числовую ось и змею/параболу.