

9 математический класс 1543. Алгебра.
13 декабря 2023

1 Разложите на множители многочлен $2x^4 - x^3y + 3x^2y^2 - xy^3 + 2y^4$.

Теорема (Виета). Пусть x, y, z — корни приведенного кубического уравнения $t^3 + pt^2 + qt + r = 0$. Тогда $x + y + z = -p$, $xy + yz + zx = q$, $xyz = -r$.

2 Для различных чисел a, b, c и некоторых p, q выполняется соотношение $a^3 + pa + q = b^3 + pb + q = c^3 + pc + q$. Докажите, что $a + b + c = 0$.

3 Решите систему уравнений
$$\begin{cases} x + y + z = -3 \\ xy + yz + zx = -2 \\ xyz = 2 \end{cases}$$

Теорема. Любой симметрический многочлен от переменных x, y, z можно выразить через $e_1 = x + y + z$, $e_2 = xy + yz + zx$, $e_3 = xyz$.

4 Выразите через e_1, e_2, e_3 : **a** $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2}$; **b** $(x + y)(y + z)(z + x)$; **c** $x^3 + y^3 + z^3$.

5 Разложите на множители $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$.

6 Постройте кубический многочлен, корни которого равны квадратам корней многочлена $x^3 + x^2 - 2x - 1$.

7 Известно, что $a + b + c = 0$, $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Найдите $a^4 + b^4 + c^4$.

8 Решите системы:

$$\text{a) } \begin{cases} x + y + z = 9 \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1 \\ xy + xz + yz = 27 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} a + 2b - 3c = 1 \\ a^2 + 4b^2 + 9c^2 = 9 \\ a^3 + 8b^3 - 27c^3 = 1 \end{cases}$$

9 Числа x, y, z удовлетворяют системе

$$\begin{cases} x + y + z = a, \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{a} \end{cases}$$

Докажите, что хотя бы одно из этих чисел равно a .

10* Разложите на множители до упора $2x^2y^2 + 2x^2z^2 + 2y^2z^2 - x^4 - y^4 - z^4$.

Домашнее задание. 13 декабря → 16 декабря

1 Пусть x, y — корни уравнения $t^2 - 14t - 5 = 0$. Составьте уравнение, корнями которого являются $\frac{x+1}{y}$ и $\frac{y+1}{x}$.

2 Пусть x, y, z — корни уравнения $u^3 + 2u^2 - 17u + 6 = 0$. Составьте кубическое уравнение, корнями которого являются $x + y, y + z, z + x$.

3 Найдите положительные решения системы:
$$\begin{cases} \sqrt{\frac{x}{y}} + \sqrt{\frac{y}{x}} = \frac{7}{\sqrt{xy}} + 1, \\ \sqrt{x^3y} + \sqrt{y^3x} = 78. \end{cases}$$

4 Решите систему
$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = x^3 + y^3 + z^3 \\ xyz = 2 \end{cases}$$

5 Постройте график функции $y = |x - 1| - |x + 3| + x + 4$ и определите, при каких значениях m прямая $y = m$ имеет с графиком данной функции две общие точки.