

9 математический класс 1543. Алгебра.
11 ноября 2023

Предложение. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ возрастают на промежутке X . Тогда

- функции $f(x) + a$ и $kf(x)$ (где $k > 0$) возрастают на X ;
- функция $f(x) + g(x)$ возрастает на X ;
- функция $-f(x)$ убывает на X ;
- функция $(f(x))^{2n+1}$ возрастает на X ;
- если $f(x) \geq 0$, то $(f(x))^{2n}$ возрастает на X ;
- если $f(x) \geq 0$ и $g(x) \geq 0$, то функция $f(x)g(x)$ возрастает на X ;
- если $f(x)$ не меняет знак на всем промежутке X , то $\frac{1}{f(x)}$ убывает на X .

Предложение. Если $f(x)$ возрастает на промежутке X , а $g(y)$ возрастает на промежутке $f(X)$, то функция $g(f(x))$ возрастает на промежутке X .

1 **а** Докажите эти предложения.

б Как изменятся эти утверждения, если какая-то из функций $f(x)$, $g(x)$ или обе эти функции будут убывать?

2 Даны две функции: $f(x) = (x - 3)^2$ и $g(x) = \frac{2}{4-x}$.

а Пользуясь предложениями, докажите, что $f(x)$ убывает на промежутке $(-\infty, 3]$, а $g(x)$ возрастает на этом же промежутке.

б Подберите какой-нибудь корень уравнения $(x - 3)^2 = \frac{2}{4-x}$ на промежутке $(-\infty, 3]$.

с Докажите, что других корней у уравнения на этом промежутке нет.

3 Докажите, что если функция $f(x)$ возрастает (убывает) на промежутке X , а функция $g(x)$ убывает (возрастает) на этом промежутке, то уравнение $f(x) = g(x)$ имеет не более одного корня на промежутке X .

4 Решите уравнения:

а $3x^3 + 2x = 4 + (2 - x)^3$; **б** $x^{1543} + 1 = \sqrt{5 - x}$; **с** $\sqrt{3x^2 - x + 2} + \sqrt{x - 1} = 3 - x$.

5 Найдите область значений функций. Для этого определите, при каких значениях a уравнения с параметром $f(x) = a$ имеет решения.

а $f(x) = \frac{3x + 1}{2x + 3}$; **б** $f(x) = \frac{x^2 + 4}{x}$; **с** $f(x) = \frac{x}{x^2 - 9}$.

Функция называется *дробно-квадратичной*, если она является отношением двух многочленов, один из которых – квадратный трехчлен, а другой имеет степень не более 2. График дробно-квадратичной функции можно строить по следующему плану:

1. Найти $D(f)$ и $E(f)$.
2. Проверить функцию на четность/нечетность.
3. Найти нули функции и определить интервалы знакопостоянства (методом интервалов).
4. Найти вертикальные асимптоты. (Прямая $x = a$ является *вертикальной асимптотой*, если при $x \rightarrow a$ значение $f(x) \rightarrow +\infty$ или $f(x) \rightarrow -\infty$. Они возникают в тех точках, где знаменатель обращается в ноль.)
5. Выделить целую часть дроби. Она задаст уравнение горизонтальной или наклонной асимптоты. (Прямая $y = ax + b$ (или $y = b$) является наклонной (горизонтальной) асимптотой, если при $x \rightarrow \infty$ значение $f(x) - (ax + b) \rightarrow 0$.)
6. Пунктиром изобразить асимптоты. Они разделят плоскость на несколько областей. Определить, в каких из них лежит график. Нарисовать «хвостики» графика вблизи асимптот.
7. При необходимости вычислить значения функции в нескольких точках и построить график.

6 По плану постройте графики функций **а** $y = \frac{x}{x^2 - 9}$; **б** $y = \frac{x^2 + 4}{x}$; **с** $y = \frac{5}{x^2 + 1}$.

Домашнее задание. 11 ноября → 14 ноября

1 Найдите область значений функции $y = \frac{x^2 + 4x + 4}{x^2 + 4x + 5}$. При каком x эта функция принимает минимальное значение?

2 Решите уравнение

a) $(x + 1)^3 = 41 - 3x - x^3$; b) $\sqrt{3 - x} = 1 - \frac{5}{x - 4}$; c) $\sqrt{x^2 + 3x + 6} + \sqrt{x + 1} = 2$.

3 Найдите область значений функции $y = \frac{2x^2 + 5}{x^2 - 1}$.

4 Решите задачу из ОГЭ.

Из пунктов А и В, расстояние между которыми 19 км, вышли одновременно навстречу друг другу два пешехода и встретились в 9 км от А. Найдите скорость пешехода, шедшего из А, если известно, что он шел со скоростью, на 1 км/ч большей, чем пешеход, шедший из В, и сделал в пути полчасовую остановку.

В записи решения должны присутствовать:

1. **Математическая модель задачи.** Иными словами, объяснение, как именно вы составляли уравнение или систему по этой задаче. Состоит из

- (а) Явного описания, что значит каждая из введенных переменных. В этом описании могут присутствовать символы S , v , t как обозначения расстояния, скорости и времени, но лучше писать словами.
- (б) Указания размерности этих переменных.
- (с) Пояснений, откуда берется каждая часть уравнения.

Математическую модель удобнее всего оформлять в виде таблицы со столбцами скорость-время-расстояние. Размерность указывается в шапке таблицы. Обычно в ОГЭ считается, что таблица является достаточным объяснением происходящего.

2. **Решение уравнения.**

- (а) Должно быть указано ОДЗ (область допустимых значений переменной). То есть написано, что переменная не равна нулям знаменателя.
- (б) Если какие-то корни отбрасываются по смыслу, то это должно быть пояснено.

3. **Ответ** с указанием размерности. Перед тем, как его писать, перечитайте вопрос и убедитесь, что вы отвечаете именно на него.