

Часть 15. Теорема косинусов

Теорема косинусов. Пусть a, b, c — стороны треугольника; α — угол, противолежащий стороне a . Тогда $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$.

- 15.1. Стороны треугольника равны 5, 8, 10. Верно ли, что треугольник остроугольный?
- 15.2. Сумма квадратов двух сторон треугольника больше квадрата третьей стороны. Докажите, что против третьей стороны лежит острый угол.
- 15.3. Гипотенуза AB прямоугольного треугольника ABC равна 9, катет $BC = 3$. На гипотенузе взята точка M , причём $AM : MB = 1 : 2$. Найдите CM .
- 15.4. Дан равносторонний треугольник со стороной a . Найдите отрезок, соединяющий вершину треугольника с точкой, делящей противоположную сторону в отношении 2 : 1.
- 15.5. Одна из сторон треугольника вдвое больше другой, а угол между этими сторонами равен 60° . Докажите, что треугольник прямоугольный.
- 15.6. Сторона треугольника равна $2\sqrt{7}$, а две другие стороны образуют угол в 30° и относятся как $1 : 2\sqrt{3}$. Найдите эти стороны.
- 15.7. Одна из сторон параллелограмма равна 10, а диагонали равны 20 и 24. Найдите косинус острого угла между диагоналями.
- 15.8. Угол при вершине D трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC равен 60° . Найдите диагонали трапеции, если $AD = 10$, $BC = 3$ и $CD = 4$.
- 15.9. Одна из сторон треугольника равна 6, вторая сторона равна $2\sqrt{7}$, а противолежащий ей угол равен 60° . Найдите третью сторону треугольника.
- 15.10. На продолжении боковой стороны AB равнобедренного треугольника ABC за вершину A взята точка D , причём $AD = 2AB$. Известно, что $AB = AC = 1$, $\angle BAC = 120^\circ$. Докажите, что треугольник BDC равнобедренный.
- 15.11. Точки M и N лежат соответственно на сторонах AD и BC ромба $ABCD$, причём $DM : AM = BN : NC = 2 : 1$. Найдите MN , если известно, что сторона ромба равна a , а $\angle BAD = 60^\circ$.
- 15.12. Докажите, что сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов всех его четырёх сторон.
- 15.13. Диагональ параллелограмма, равная b , перпендикулярна стороне параллелограмма, равной a . Найдите вторую диагональ параллелограмма.
- 15.14. В равнобедренном треугольнике с боковой стороной, равной 4, проведена медиана к боковой стороне. Найдите основание треугольника, если эта медиана равна 3.
- 15.15. Основание равнобедренного треугольника равно $4\sqrt{2}$, а медиана, проведённая к боковой стороне, равна 5. Найдите боковые стороны.
- 15.16. Стороны треугольника равны a, b, c . Найдите медиану m_c .
- 15.17. Стороны треугольника равны 11, 13 и 12. Найдите медиану, проведённую к большей стороне.
- 15.18. В треугольнике две стороны равны 11 и 23, а медиана, проведённая к третьей, равна 10. Найдите третью сторону.
- 15.19. Докажите, что отношение суммы квадратов медиан треугольника к сумме квадратов его сторон равно $\frac{3}{4}$.
- 15.20. Около четырёхугольника $ABCD$ можно описать окружность. Кроме того, $AB = 3$, $BC = 4$, $CD = 5$ и $AD = 2$. Найдите AC .
- 15.21. Можно ли около четырёхугольника $ABCD$ описать окружность, если $\angle ADC = 30^\circ$, $AB = 3$, $BC = 4$, $AC = 6$?
- 15.22. В равнобедренном треугольнике основание и боковая сторона равны соответственно 5 и 20. Найдите биссектрису угла при основании.
- 15.23. В треугольнике ABC известно, что $AC = 13$, $AB = 14$, $BC = 15$. На стороне BC взята точка M , для которой $CM : MB = 1 : 2$. Найдите AM .
- 15.24. В треугольнике ABC известно, что $AB = 12$, $AC = 15$, $BC = 18$. Найдите биссектрису треугольника, проведённую из вершины наибольшего угла.
- 15.25. Найдите косинусы углов трапеции с основаниями, равными 3 и 7 и боковыми сторонами, равными 2 и 5.
- 15.26. Медианы треугольника ABC , проведённые из вершин B и C , равны 6 и 9 и пересекаются в точке M . Известно, что $\angle BMC = 120^\circ$. Найдите стороны треугольника.
- 15.27. Стороны параллелограмма равны 2 и 4, а угол между ними равен 60° . Через вершину этого угла проведены прямые, проходящие через середины двух других сторон параллелограмма. Найдите косинус угла между этими прямыми.
- 15.28. Окружность, вписанная в треугольник ABC , касается стороны AB в точке M , при этом $AM = 1$, $BM = 4$. Найдите CM , если известно, что $\angle BAC = 120^\circ$.
- 15.29. Основания трапеции равны 1 и 6, а диагонали — 3 и 5. Под каким углом видны основания из точки пересечения диагоналей?
- 15.30. В выпуклом четырёхугольнике отрезки, соединяющие середины противоположных сторон, равны соответственно a и b и пересекаются под углом 60° . Найдите диагонали четырёхугольника.
- 15.31. Диагонали выпуклого четырёхугольника равны c и d и пересекаются под углом 45° . Найдите отрезки, соединяющие середины противоположных сторон четырёхугольника.
- 15.32. Центр окружности, вписанной в прямоугольный треугольник, удалён от вершин острых углов на расстояния a и b . Найдите гипотенузу.

15.33. Точка M лежит на стороне BC параллелограмма $ABCD$ с углом 45° при вершине A , причём $\angle AMD = 90^\circ$ и $BM:MC = 2:3$. Найдите отношение соседних сторон параллелограмма.

15.34. На боковой стороне BC равнобедренного треугольника ABC как на диаметре построена окружность, пересекающая основание этого треугольника в точке D . Найдите расстояние от вершины A до центра окружности, если $AD = \sqrt{3}$, а угол ABC равен 120° .

15.35. Окружность, вписанная в прямоугольный треугольник с катетами 6 и 8 , касается гипотенузы в точке M . Найдите расстояние от точки M до вершины прямого угла.

15.36. Точка M лежит на стороне AC равностороннего треугольника ABC со стороной, равной $3a$, причём $AM:MC = 1:2$. Точки K и L на сторонах AB и BC являются вершинами другого равностороннего треугольника MKL . Найдите его стороны.

15.37. В треугольнике ABC проведены высоты AD и CE . Найдите AC , если $BC = a$, $AB = b$, $\frac{DE}{AC} = k$.

15.38. В окружности проведены хорды AB и BC , причём $AB = \sqrt{3}$, $BC = 3\sqrt{3}$, $\angle ABC = 60^\circ$. Найдите длину той хорды окружности, которая делит угол ABC пополам.

15.39. В трапеции $ABCD$ основание AD равно 16 , а боковая сторона CD равна $8\sqrt{3}$. Окружность проходящая через точки A , B и C , пересекает прямую AD в точке M , $\angle AMB = 60^\circ$. Найдите BM .

15.40. Дан треугольник ABC . Известно, что $AB = 4$, $AC = 2$ и $BC = 3$. Биссектриса угла BAC пересекает сторону BC в точке K . Прямая, проходящая через точку B параллельно AC , пересекает продолжение биссектрисы AK в точке M . Найдите KM .

15.41. В треугольнике ABC вписана окружность, которая касается сторон AB , BC , AC соответственно в точках M , D , N . Найдите MD , если известно, что $NA = 2$, $NC = 3$, $\angle BCA = 60^\circ$.

15.42. В окружности радиуса $R = 4$ проведены хорда AB и диаметр AK , образующий с хордой угол $22,5^\circ$. В точке B проведена касательная к окружности, пересекающая продолжение диаметра AK в точке C . Найдите медиану AM треугольника ABC .

15.43. В треугольнике ABC сторона AC больше стороны AB . Докажите, что медиана, проведённая из вершины B , меньше медианы, проведённой из вершины C .

15.44. Стороны треугольника равны a , b и c . Найдите биссектрису l_a .

15.45. Дана трапеция $ABCD$ с основаниями $AD = 3\sqrt{39}$ и $BC = \sqrt{39}$. Кроме того дано, что угол BAD равен 30° , и угол ADC равен 60° . Через точку D проходит прямая, делящая трапецию на две равновеликие фигуры. Найдите длину всего отрезка этой прямой, находящегося внутри трапеции.

15.46. Дан параллелограмм $ABCD$, в котором $AB = a$, $BC = b$, $\angle ABC = \alpha$. Найдите расстояние между центрами окружностей, описанных около треугольников BCD и DAB .

15.47. Докажите, что сумма квадратов расстояний от любой точки окружности до вершин правильного вписанного треугольника есть величина постоянная, не зависящая от положения точки на окружности.

15.48. Сторона ромба $ABCD$ равна a , а острый угол равен α . На отрезках AD и BC построены как на сторонах вне ромба правильные треугольники. Найдите расстояние между центрами этих треугольников.

15.49. В окружность радиуса 2 вписан правильный шестиугольник $ABCDEF$. Из точки K , лежащей на продолжении стороны AF так, что $KA < KF$ и $KA = \sqrt{11} - 1$, проведена секущая KH , пересекающая окружность в точках N и H . Известно, что внешняя часть секущей KN равна 2 ($KN = 2$), а угол NFH — тупой. Найдите угол NKF .

15.50. Окружность, вписанная в треугольник ABC делит медиану BM на три равные части. Найдите отношение $BC:CA:AB$.

15.51. Медиана AD остроугольного треугольника ABC равна 5 . Проекция этой медианы на стороны AB и AC равны 4 и $2\sqrt{5}$ соответственно. Найдите сторону BC .

15.52. Теорема Стюарта. Точка D расположена на стороне BC треугольника ABC . Докажите, что $AB^2 \cdot DC + AC^2 \cdot BD - AD^2 \cdot BC = BC \cdot DC \cdot BD$.

15.53. Около окружности описана равнобедренная трапеция с основаниями AD и BC ($AD > BC$). Прямая, параллельная диагонали AC , пересекает стороны AD и CD в точках M и N соответственно и касается окружности в точке P . Найдите углы трапеции, если $\frac{MP}{PN} = k$ ($k < 1$).

15.54. Даны отрезки a и b . Постройте отрезок $\sqrt[4]{a^4 + b^4}$.

15.55. Точка D лежит на стороне AC треугольника ABC . Окружность радиуса $\frac{2}{\sqrt{3}}$, вписанная в треугольник ABD , касается стороны AB в точке M , а окружность радиуса $\sqrt{3}$, вписанная в треугольник BCD , касается стороны BC в точке N . Известно, что $BM = 6$, $BN = 5$. Найдите стороны треугольника ABC .

15.56. Сторона BC треугольника ABC равна 4 , сторона AB равна $2\sqrt{19}$. Известно, что центр окружности, проходящей через середины сторон треугольника, лежит на биссектрисе угла C . Найдите AC .