

Будем считать известными следующие свойства площадей.

- 1) Площадь есть неотрицательная величина.
  - 2) Равные фигуры имеют равные площади.
  - 3) Если фигура разрезана на две фигуры, то её площадь равна сумме площадей этих фигур.
  - 4) Площадь прямоугольника равна произведению двух его соседних сторон.
- Фигуры, имеющие равные площади, называются равновеликими.

**10.1°.** Докажите следующие утверждения.

- а) Площадь треугольника равна половине произведения его основания на высоту.
- б) Площадь параллелограмма равна произведению его основания на высоту.
- в) Площадь ромба равна половине произведения его диагоналей.
- г) Площадь трапеции равна произведению её средней линии на высоту.

**10.2°.** Докажите, что медиана разбивает треугольник на два равновеликих треугольника.

**10.3.** Какую часть площади треугольника отсекает от него средняя линия?

**10.4°.** Диагонали разбивают трапецию на четыре треугольника. Докажите, что треугольники, прилежащие к боковым сторонам, равновелики.

**10.5.** Диагонали четырёхугольника разбивают его на четыре треугольника. Известно, что треугольники, прилежащие к двум противоположным сторонам, равновелики. Докажите, что данный четырёхугольник — трапеция или параллелограмм.

**10.6.** Докажите, что площадь четырёхугольника со взаимно перпендикулярными диагоналями равна половине произведения диагоналей.

**10.7°.** Пусть  $M$  — точка на стороне  $AB$  треугольника  $ABC$ , причём  $AM:MB = m:n$ . Докажите, что площадь треугольника  $SAM$  относится к площади треугольника  $SBM$  как  $m:n$ .

**10.8.** Площадь трапеции, основания которой относятся как  $3:2$ , равна  $35$ . Найдите площади треугольников, на которые трапеция разбивается диагональю.

**10.9.** На сторонах  $AB$  и  $AC$  треугольника  $ABC$ , площадь которого равна  $50$ , взяты соответственно точки  $M$  и  $K$  так, что  $AM:MB = 1:5$ , а  $AK:KC = 3:2$ . Найдите площадь треугольника  $AMK$ .

**10.10.** Точки  $M$  и  $N$  расположены на стороне  $BC$  треугольника  $ABC$ , а точка  $K$  — на стороне  $AC$ , причём  $BM:MN:NC = 1:1:2$  и  $CK:AK = 1:4$ . Известно, что площадь треугольника  $ABC$  равна  $1$ . Найдите площадь четырёхугольника  $AMNK$ .

**10.11.** Площадь треугольника  $ABC$  равна  $1$ . Точки  $M$  и  $N$  — середины сторон  $AB$  и  $AC$ , а точка  $K$  лежит на стороне  $BC$ . Найдите площадь треугольника  $KMN$ .

**10.12°.** Докажите, что медианы треугольника делят его на шесть равновеликих частей.

**10.13°.** Прямая, проведённая через вершину  $C$  трапеции  $ABCD$  параллельно диагонали  $BD$ , пересекает продолжение основания  $AD$  в точке  $M$ . Докажите, что треугольник  $ACM$  равновелик трапеции  $ABCD$ .

**10.14.** Основания равнобокой трапеции равны  $a$  и  $b$  ( $a > b$ ), острый угол равен  $45^\circ$ . Найдите площадь трапеции.

**10.15.** Проекция диагонали равнобокой трапеции на её большее основание равна  $a$ , боковая сторона равна  $b$ . Найдите площадь трапеции, если угол при её меньшем основании равен  $150^\circ$ .

**10.16°.** Точки  $M$  и  $N$  принадлежат соответственно сторонам  $AB$  и  $AC$  треугольника  $ABC$  или их продолжениям, причём  $\frac{AM}{AB} = \frac{m}{n}$ ,  $\frac{AN}{AC} = \frac{p}{q}$ . Докажите, что площади треугольников  $AMN$  и  $ABC$  относятся как  $\frac{m}{n} \cdot \frac{p}{q}$ .

**10.17.** Стороны треугольника с площадью, равной  $1$ , разделены в отношении  $2:1$  по часовой стрелке. Найдите площадь треугольника с вершинами в точках деления.

**10.18.** Дан треугольник  $ABC$ . Найдите геометрическое место таких точек  $M$ , для которых: а) треугольники  $AMB$  и  $ABC$  равновелики; б) треугольники  $AMB$  и  $AMC$  равновелики; в) треугольники  $AMB$ ,  $AMC$  и  $BMC$  равновелики.

**10.19.** Вершина  $E$  параллелограмма  $DEFG$  лежит на стороне  $AB$  параллелограмма  $ABCD$ , а вершина  $C$  параллелограмма  $ABCD$  лежит на стороне  $FG$  параллелограмма  $DEFG$ . Докажите, что параллелограммы  $ABCD$  и  $DEFG$  равновелики.

**10.20.** Точка внутри параллелограмма соединена со всеми его вершинами. Докажите, что суммы площадей треугольников, прилежащих к противоположным сторонам параллелограмма, равны между собой.

**10.21°.** Через точку на диагонали параллелограмма проведены прямые, параллельные сторонам параллелограмма. Эти прямые разбивают параллелограмм на четыре параллелограмма. Докажите, что параллелограммы, расположенные по разные стороны от указанной диагонали, равновелики. Верно ли обратное, т. е., если для некоторой точки внутри параллелограмма соответствующие параллелограммы равновелики, то эта точка лежит на диагонали параллелограмма?

**10.22.** Докажите, что если диагональ какого-нибудь четырёхугольника делит другую диагональ пополам, то она делит пополам и площадь четырёхугольника.

**10.23°.** Середины сторон выпуклого четырёхугольника последовательно соединены отрезками. Докажите, что площадь полученного четырёхугольника вдвое меньше площади исходного.

**10.24.** Боковые стороны трапеции лежат на перпендикулярных прямых. Найдите площадь четырёхугольника с вершинами в серединах диагоналей и серединах оснований, если боковые стороны равны  $a$  и  $b$ .

**10.25.** Данный параллелограмм разделите на три равновеликие части прямыми, выходящими из одной вершины.

**10.26.** Отрезки, соединяющие середины противоположных сторон выпуклого четырёхугольника, взаимно перпендикулярны и равны  $2$  и  $7$ . Найдите площадь четырёхугольника.

**10.27.** Отрезки, соединяющие середины противоположных сторон выпуклого четырёхугольника, равны между собой. Найдите площадь четырёхугольника, если его диагонали равны  $8$  и  $12$ .

**10.28.** На продолжениях сторон  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$  и  $DA$  выпуклого четырёхугольника  $ABCD$  соответственно за точки  $B$ ,  $C$ ,  $D$  и  $A$  отложены отрезки  $BB_1$ ,  $CC_1$ ,  $DD_1$  и  $AA_1$ , равные этим сторонам. Найдите площадь четырёхугольника  $A_1B_1C_1D_1$ , если площадь четырёхугольника  $ABCD$  равна  $s$ .

**10.29°.** Докажите, что сумма расстояний от произвольной точки внутри равностороннего треугольника до его сторон всегда одна и та же.

**10.30°.** Докажите, что сумма расстояний от произвольной точки на основании равнобедренного треугольника до его боковых сторон всегда одна и та же.

**10.31.** Стороны  $AB$  и  $AC$  треугольника равны соответственно  $a$  и  $b$ . На медиане, проведённой к стороне  $BC$  взята точка  $M$ . Сумма расстояний от этой точки до прямых  $AB$  и  $AC$  равна  $c$ . Найдите эти расстояния.

**10.32.** а) Дана равнобокая трапеция, в которую можно вписать окружность. В каком отношении биссектриса тупого угла делит площадь трапеции?

б) Дана прямоугольная трапеция, в которую можно вписать окружность. В каком отношении биссектриса острого угла делит площадь трапеции?

**10.33°.** Докажите, что площадь треугольника равна произведению полупериметра треугольника на радиус вписанной окружности.

**10.34.** Докажите теорему Пифагора, используя результат предыдущей задачи.

**10.35.** Докажите, что площадь прямоугольного треугольника равна произведению отрезков, на которые гипотенуза делится точкой касания со вписанной окружностью.

**10.36.** Окружность с центром на гипотенузе прямоугольного треугольника касается катетов. Найдите радиус окружности, если катеты равны  $a$  и  $b$ .

**10.37°.** Окружность касается стороны треугольника, равной  $a$ , и продолжений двух других сторон. Докажите, что радиус окружности равен площади треугольника, делённой на разность между полупериметром и стороной  $a$ .

**10.38.** Найдите площадь прямоугольного треугольника с гипотенузой, равной  $c$ , и острым углом  $15^\circ$ .

**10.39.** В параллелограмме соединены середины каждой стороны с концом следующей стороны, отчего получился внутренний параллелограмм. Докажите, что его площадь составляет  $1/5$  площади данного параллелограмма.

**10.40°.** Докажите, что биссектриса треугольника делит его сторону на отрезки, пропорциональные двум другим сторонам.

**10.41.** Каждая сторона треугольника больше 100. Может ли его площадь быть меньше 0,01?

**10.42.** Произвольный четырёхугольник разделён диагоналями на четыре треугольника; площади трёх из них равны 10, 20 и 30 и каждая меньше площади четвёртого треугольника. Найдите площадь данного четырёхугольника.

**10.43.** Центр одного единичного квадрата совпадает с вершиной другого. Найдите площадь общей части квадратов.

**10.44.** Боковая сторона  $AB$  и основание  $BC$  трапеции  $ABCD$  вдвое меньше её основания  $AD$ . Найдите площадь трапеции, если  $AC = a$ ,  $CD = b$ .

**10.45.** Отрезок, соединяющий середины двух противоположных сторон выпуклого четырёхугольника, разделит его на два четырёхугольника, имеющих равные площади. Докажите, что эти стороны параллельны.

**10.46.** Через точку  $M$ , лежащую внутри параллелограмма  $ABCD$ , проведены прямые  $PR$  и  $QS$ , параллельные сторонам  $BC$  и  $AB$  (точки  $P$ ,  $Q$ ,  $R$  и  $S$  лежат на сторонах  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$  и  $DA$  соответственно). Докажите, что прямые  $BS$ ,  $PD$  и  $MC$  пересекаются в одной точке.

**10.47.** Пусть  $P$  — середина стороны  $AB$  выпуклого четырёхугольника  $ABCD$ . Докажите, что если площадь треугольника  $PDC$  равна половине площади четырёхугольника  $ABCD$ , то стороны  $BC$  и  $AD$  параллельны.

**10.48.** Дан треугольник  $ABC$  площади 1. Из вершины  $B$  опущен перпендикуляр  $BM$  на биссектрису угла  $C$ . Найдите площадь треугольника  $AMC$ .

**10.49°.** Теорема Пифагора. На катетах и гипотенузе прямоугольного треугольника как на сторонах построены внешним образом три квадрата. Докажите, что сумма площадей двух меньших квадратов равна площади большего.

#### Дополнительные задачи

**10.50.** Дан угол  $XAY$  и точка  $O$  внутри него. Проведите через точку  $O$  прямую, отсекающую от данного угла треугольник наименьшей площади.

**10.51.** В квадрате со стороной, равной 1, произвольно берут 101 точку (не обязательно внутри квадрата, возможно, часть на сторонах), причём никакие три из них не лежат на одной прямой. Докажите, что существует треугольник с вершинами в этих точках, площадь которого не больше 0,01.

**10.52.** Найдите геометрическое место точек  $X$ , лежащих внутри трапеции  $ABCD$  ( $BC \parallel AD$ ) или на её сторонах, если известно, что  $S_{\triangle XAB} = S_{\triangle XCD}$ .

**10.53.** Точки  $K$  и  $L$  лежат на стороне  $BC$  выпуклого четырёхугольника  $ABCD$ , а точки  $M$  и  $N$  на стороне  $AD$ , причём  $BK = KL = LC$  и  $AN = NM = MD$ . Докажите, что площадь треугольника  $KNL$  равна полусумме площадей треугольников  $ABK$  и  $CML$ .

**10.54.** Две прямые делят каждую из двух противоположных сторон выпуклого четырёхугольника на три равные части. Докажите, что между этими прямыми заключена треть площади четырёхугольника.

**10.55.** В выпуклом четырёхугольнике  $ABCD$  отрезки, соединяющие середины противоположных сторон, пересекаются в точке  $O$ . Докажите, что  $S_{\triangle AOD} + S_{\triangle BOC} = \frac{1}{2}S_{ABCD}$ .

**10.56.** Пусть  $M$  и  $N$  — середины противоположных сторон  $BC$  и  $AD$  выпуклого четырёхугольника  $ABCD$ , отрезки  $AM$  и  $BN$  пересекаются в точке  $P$ , а отрезки  $DM$  и  $CN$  — в точке  $Q$ . Докажите, что сумма площадей треугольников  $APB$  и  $CQD$  равна площади четырёхугольника  $MPNQ$ .

**10.57.** Середина каждой стороны параллелограмма соединена с концами противоположной стороны. Найдите площадь восьмиугольника, образованного пересечениями проведённых отрезков, если площадь параллелограмма равна 1.

**10.58.** Из середины каждой стороны остроугольного треугольника опущены перпендикуляры на две другие стороны. Докажите, что площадь ограниченного ими шестиугольника равна половине площади треугольника.

**10.59.** Перпендикуляры, опущенные из внутренней точки равностороннего треугольника, на его стороны, и отрезки, соединяющие эту точку с вершинами, разбивают треугольник на шесть прямоугольных треугольников. Докажите, что сумма площадей трёх из них, взятых через один, равна сумме площадей трёх остальных.

**10.60.** На каждой стороне параллелограмма взята по точке. Площадь четырёхугольника с вершинами в этих точках равна половине площади параллелограмма. Докажите, что хотя бы одна из диагоналей четырёхугольника параллельна одной из сторон параллелограмма.

**10.61.** Три прямые, параллельные сторонам треугольника  $ABC$  и проходящие через одну точку, отсекают от треугольника  $ABC$  трапеции. Три диагонали этих трапеций, не имеющие общих концов, делят треугольник на семь частей, из которых четыре — треугольники. Докажите, что сумма площадей трёх из этих треугольников, прилежащих к сторонам треугольника  $ABC$ , равна площади четвёртого.