Подобие в круге

Теорема 1. Произведения отрезков пересекающихся хорд равны.

Теорема 2. Если из одной точки провести секущую и касательную к окружности, то произведение всей секущей на ее внешнюю часть равно квадрату касательной .

Пример 1. Точка М внутри окружности делит хорду этой окружности на отрезки, равные a и b. Через точку M проведена хорда AB, делящаяся точкой M пополам. Найдите AB.

Пример 2. Из точки M, расположенной вне окружности на расстоянии $\sqrt{7}$ от центра, проведены касательная MA (A — точка касания) и секущая, внутренняя часть которой вдвое меньше внешней и равна радиусу окружности. Найдите радиус окружности.

Пример 3. Хорды AB и CD окружности пересекаются в точке M, причем AM = AC. Докажите, что продолжения высот AA1 и DD1 треугольников CAM и BDM пересекаются на окружности.

1. Радиусы двух концентрических окружностей относятся как 1 : 2. Хорда большей окружности делится меньшей окружностью на три равные части. Найдите отношение этой хорды к диаметру большей окружности.

2. Дана точка P, удаленная на расстояние, равное 7, от центра окружности, радиус которой равен 11. Через точку P проведена хорда, равная 18. Найдите отрезки, на которые делится хорда точкой

3. Во вписанном четырехугольнике ABCD, диагонали которого пересекаются в точке K, известно, что AB = a, BK = b, AK = c, CD = d. Найдите AC.

4. Окружность делит каждую из сторон треугольника на три равные части. Докажите, что этот треугольник правильный.

4**. Точка M лежит внутри окружности радиуса R и удалена от центра на расстояние d. Докажите, что для любой хорды AB этой окружности, проходящей через точку M, произведение AM · BM одно и то же. Чему оно равно?**

5. **Точка M лежит вне окружности радиуса R и удалена от центра на расстояние d. Докажите, что для любой прямой, проходящей через точку M и пересекающей окружность в точках A и B, произведение AM · BM. Чему оно равно ?**

6. В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом при вершине C катет BC равен a, радиус вписанной окружности равен r. Вписанная окружность касается катета AC в точке D. Найдите хорду, соединяющую точки пересечения окружности с прямой BD

7. Две окружности пересекаются в точках A и B. Проведены хорды AC и AD этих окружностей так, что хорда одной окружности касается другой окружности. Найдите AB, если CB = a, DB = b.

8 . Докажите, что прямая, проходящая через точки пересечения двух окружностей, делит пополам общую касательную к ним.

9. В угол вписаны две окружности; одна из них касается сторон угла в точках K1 и K2, а другая — в точках L1 и L2. Докажите, что прямая K1L2 высекает на этих двух окружностях равные хорды.

10. Сторона AD квадрата ABCD равна 1 и является хордой некоторой окружности, причем остальные стороны квадрата лежат вне этой окружности. Касательная BK, проведенная из вершины B к этой же окружности, равна 2. Найдите диаметр окружности.

11. Окружность и прямая касаются в точке M. Из точек A и B этой окружности опущены перпендикуляры на прямую, равные a и b соответственно. Найдите расстояние от точки M до прямой AB.

12. Каждая из двух равных пересекающихся хорд окружности делится точкой пересечения на два отрезка. Докажите, что отрезки первой хорды соответственно равны отрезкам второй хорды.

13. Четырехугольник ABCD вписан в окружность. Диагональ AC является биссектрисой угла BAD и пересекается с диагональю BD в точке K. Найдите KC, если BC = 4 и AK = 6. (подсказка: где же тут подобные треугольники получились)

14. В окружности проведены три попарно пересекающиеся хорды. Каждая хорда разделена точками пересечения на три равные части. Найдите радиус окружности, если одна из хорд

равна a.

15. **Докажите, что квадрат биссектрисы треугольника равен произведению сторон, ее заключающих, без произведения отрезков третьей стороны, на которые она разделена биссектрисой.**

16. **(Теорема Птолемея) Докажите, что если четырехугольник вписан в окружность, то сумма произведений длин двух пар его противоположных сторон равна произведению длин его диагоналей** .

17 (Теорема Помпею) На меньшей дуге BC окружности, описанной около равностороннего треугольника ABC, взята произвольная точка P. Докажите, что AP = BP + CP (подсказка: см предыдущую задачу)

18. Точка B расположена между точками A и C. На отрезках AB и AC как на диаметрах построены окружности. Прямая, перпендикулярная AC и проходящая через точку B , пересекает большую окружность в точкеD. Прямая, проходящая через точку C, касается меньшей окружности в точке K. Докажите, что CD = CK.

19. В прямоугольном треугольнике ABC с катетами AB = = 3 и BC = 4 через середины сторон AB и AC проведена окружность, касающаяся катета BC. Найдите длину отрезка гипотенузы AC, который лежит внутри этой окружности D.

20. Окружность касается сторон AB и BC треугольника ABC в точках D и E соответственно. Найдите высоту треугольника ABC, опущенную из вершины A, если AB = 5, AC = = 2, а точки A, D, E, C лежат на одной окружности.

21. В равнобедренном треугольнике ABC (AB = AC) проведены биссектрисы AD, BE, CF. Найдите BC, если известно, что AC = 1, а вершина A лежит на окружности, проходящей через точки D, E, F.

22. Докажите, что в любом треугольнике радиус R описанной окружности, радиус r вписанной окружности и расстояние d между центрами этих окружностей связаны равенством $d^2=R^2-2Rr$ (формула Эйлера)

Продолжение…..

23. Отрезки AB и CD пересекаются в точке O, и $OA \cdot OB = CO \cdot OD$

Докажите, что точки A, B, C, D лежат на одной окружности.

24 . Точки A1 и B1 принадлежат соответственно сторонам OA и OB угла AOB (не равного 180◦) и $OA \cdot OA_1 = OB \cdot OB_1$ Докажите, что точки A, B, A_1, B_1 принадлежат одной окружности.

25. M находится на продолжении хорды AB. Докажите, что если точка C окружности такова, что MC^2 = = MA · MB, то MC — касательная к окружности.

26. Через точку P, лежащую на общей хорде двух пересекающихся окружностей, проведены хорда KM первой окружности и хорда LN второй окружности. Докажите, что четырехугольник с вершинами в точках K, L, M и N — вписанный.

27 . На плоскости даны три попарно пересекающиеся окружности, центры которых не лежат на одной прямой. Докажите, что три общие хорды каждой пары этих окружностей пересекаются в одной точке.

28. На продолжении хорды KL окружности с центром O взята точка A и из нее проведены касательные AP и AQ; M — середина отрезка PQ. Докажите, что $\angle MKO = \angle MLO$

Повторение

1. Докажите, используя теорему Чевы, что высоты треугольника пересекаются в одной точке.

2. Докажите, что отрезки, соединяющие вершины треугольника с точками касания противоположных сторон с вписанной окружностью пересекаются в 1 точке (*точка Жергонна*).

3. Докажите, что отрезки, соединяющие вершины треугольника с точками касания противоположных сторон с соответствующими вневписанными окружностями, пересекаются в одной точке *(точка Нагеля)*.

4. (Теорема Монжа). Даны непересекающиеся окружности ω1, ω2 и ω3. Пусть A — точка пересечения внешних касательных окружностей ω1 и ω2, B — внешних касательных ω2 и ω3, C — внешних касательных ω3 и ω1. Докажите, что точки A, B и C лежат на одной прямой.

5. (Теорема Ван-Обеля.) Три чевианы треугольника ABC – отрезки AA1, BB1 и CC1 – пересекаются в точке O. Докажите, что AB1/ B1C + AC1/ C1B = AO/ OA1

6. Медиана треугольника перпендикулярна его биссектрисе. В каком отношении она делит эту биссектрису.

7. Пусть l – биссектриса внешнего угла при вершине C треугольника ABC со сторонами AC = 7 и BC = 4. Прямая, проведённая через середину O стороны AB параллельно l, пересекает прямую AC в точке E. Найдите CE.

8. В ΔABC проведена биссектриса AM. Окружность, описанная около ΔABM, повторно пересекает AC в точке K, а окружность, описанная около ΔAMC, пересекает AB в точке L. Докажите, что BL = KC.

9. Докажите, что треугольники с длинами сторон a, b, c и a_1, b_1, c_1 подобны тогда и только тогда, когда $\sqrt{aa_1}+\sqrt{bb_1}+\sqrt{cc_1}=\sqrt{(a+b+c)(a_1+b_1+c_1)}$.

Избранные дз, самостоятельные и дополнительные задачи

1. В квадрат ABCD со стороной a вписана окружность, которая касается стороны CD в точке E. Найдите хорду, соединяющую точки, в которых окружность пересекается с прямой AE

2. Две окружности пересекаются в точках A и B. Точка X лежит на прямой AB, вне окружностей. Докажите, что длины всех касательных, проведенных из точки X к окружностям, равны.

3. Точка M — середина хорды AB. Хорда CD пересекает AB в точке M. На CD как на диаметре построена полуокружность. Точка E лежит на этой полуокружности и ME — перпендикуляр к CD. Найти угол AEB.

4. Прямая *OA* касается окружности в точке *A*, а хорда *BC* параллельна *OA*. Прямые *OB* и *OC* вторично пересекают окружность в точках *K* и *L*. Докажите, что прямая *KL* делит отрезок *OA* пополам.

5* Пусть действительные числа m и n таковы, что график функции $f(x) = x^2+mx+n$ пересекает оси координат в точках A, B и C, которые не совпадают с началом координат. Доказать, что при любых таких m и n все окружности (ABC), проходящие через эти точки, имеют общую точку.

Дополнительные задачи

(Из прокопенко для 2007)

1. Две окружности пересекаются в точках A и B. Точка X лежит на прямой AB, вне окружностей. Докажите, что длины всех касательных, проведенных из точки X к окружностям, равны.

2. Докажите, что прямая, проходящая через точки пересечения двух окружностей, делит пополам их общую касательную.

3. Окружность делит каждую из сторон треугольника на три равные части. Докажите, что этот треугольник правильный.

4. Если через точку внутри окружности проходят три равные хорды, то эта точка является центром окружности.

5. Точка M — середина хорды AB. Хорда CD пересекает AB в точке M. На CD как на диаметре построена полуокружность. Точка E лежит на этой полуокружности и ME — перпендикуляр к CD. Найти угол AEB.

6. В угол вписаны две окружности. Одна из них касается сторон угла в точках A и B, а другая в точках C и D. Докажите, что прямая AD высекает на этих окружностях равные хорды.

7. Дана окружность ω и точки P и K вне её. Через точку P проведена секущая к окружности ω, пересекающая ее в точках A и B. Докажите, что вторая точка пересечения прямой PK с окружностью, проходящей через точки K, A, B, не зависят от выбора секущей AB.

8. Две окружности касаются внешним образом. Точка A — точка касания общей внешней касательной к первой окружности, точка B — точка той же окружности, диаметрально противоположная A. Доказать, что длина касательной BC, проведенной из точки B к другой окружности, равна диаметру первой окружности.

9. Доказать, что все окружности, проходящие через данную точку A и пересекающие данную окружность ω в диаметрально противоположных точках B и C, проходят одновременно через некоторую фиксированную точку плоскости, отличную от A.

10. Через вершины A и C треугольника ABC и его инцентр проведена окружность. Доказать, что длина отрезка касательной, проведенной к этой окружности из вершины B, равна √ BA · BC.

11. Пусть действительные числа m и n таковы, что график функции f(x) = x 2+mx+n пересекает оси координат в точках A, B и C, которые не совпадают с началом координат. Доказать, что при любых таких m и n все окружности (ABC), проходящие через эти точки, имеют общую точку.

12. Из точки MA к окружности проведены касательные MA и MB. Еще одна окружность проходит через точки M и A и касается прямой AB. Пусть E – точка пересечения данных окружностей, отличная от A. Докажите, что прямая BE делит отрезок AM пополам.

13. На плоскости даны окружность ω, точка A, лежащая внутри ω и точка B, отличная от A. Рассматриваются всевозможные треугольники BXY , такие что точки X и Y лежат на ω и хорда XY проходит через точку A. Докажите, что центры окружностей, описанных около треугольников BXY , лежат на одной прямой.

14. Прямая OA касается окружности в точке A, а хорда BC параллельна OA Прямые OB и OC вторично пересекают окружность в точках K и L Докажите, что прямая KL делит отрезок OA пополам

СР 10.12

1. Сторона AB треугольника ABC является хордой некоторой окружности. Стороны AC и BC лежат внутри окружности, продолжение стороны AC пересекает окружность в точке D, а продолжение стороны BC — в точке E, причём AB = AC = CD = 2, CE = √ 2. Найдите радиус окружности.
2. Продолжение медианы треугольника ABC, проведенной из вершины A, пересекает описанную окружность в точке D. Найдите BC, если AC = DC = 1.
3. Две окружности пересекаются в точках A и B. Проведены хорды AC и AD этих окружностей так, что хорда одной окружности касается другой окружности. CB = 20, DB = 5, AD=6. Пусть BL –биссектриса треугольника ABC. Найдите AL и BL. (Подсказака: найдите сначала AB)

4. В ΔABC проведена биссектриса AM. Окружность, описанная около ΔABM, повторно пересекает AC в точке K, а окружность, описанная около ΔAMC, пересекает AB в точке L. Докажите, что BL = KC.

5. В равнобедренном треугольнике ABC (AB = BC) проведена биссектриса AM. На луче CA отложен отрезок CN, равный BM (см. рис. 2). Докажите, что точки A, B, M и N лежат на одной окружности.

****

Доказать, что, если на основании AC равнобедренного треугольника ABC взять произвольную точку M, то $BC^2 - BM^2 = AM*CM$