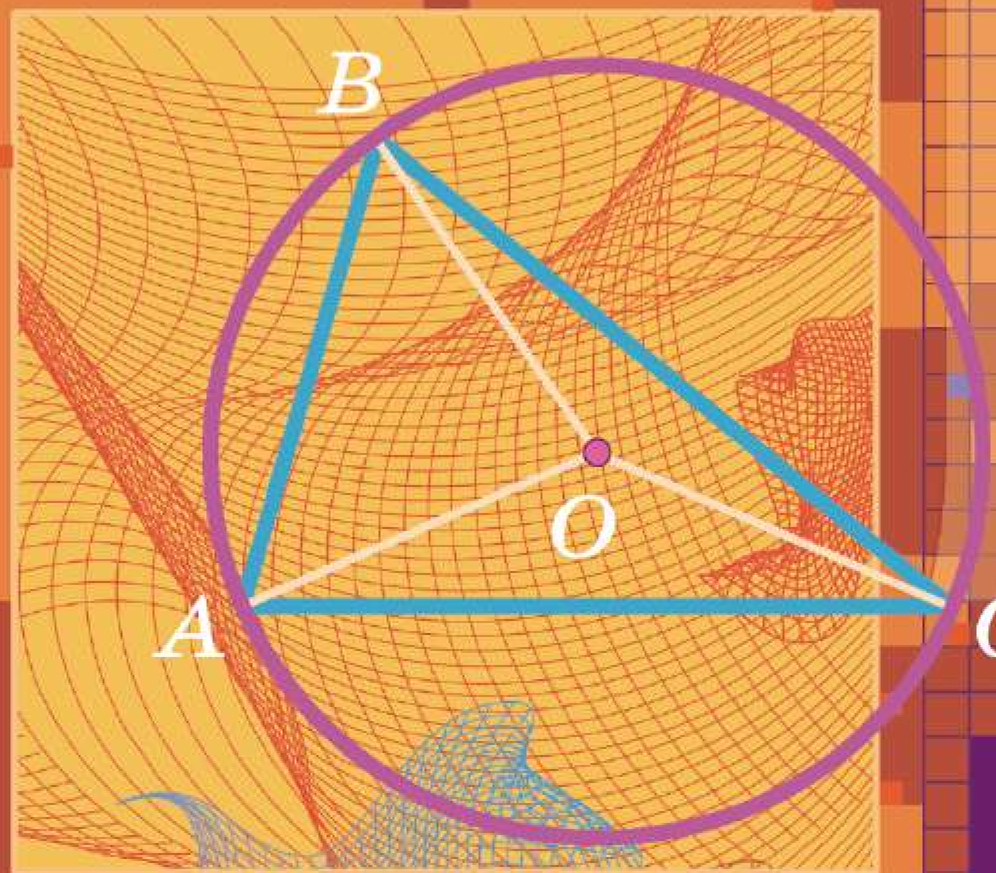
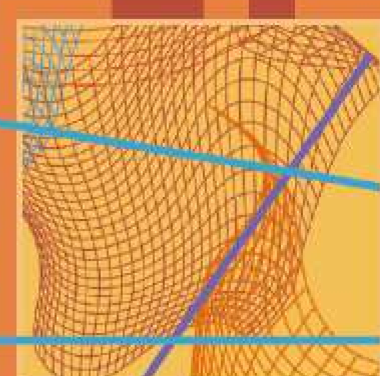
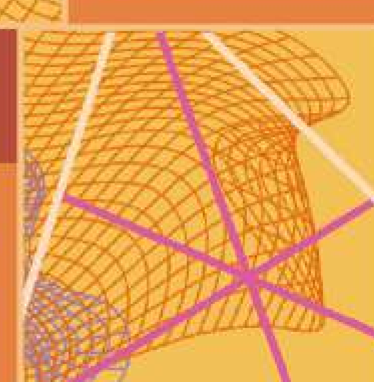
Геометрия

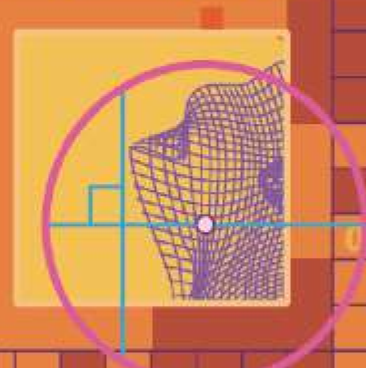


8

А. Г. Мерзляк
В. М. Поляков







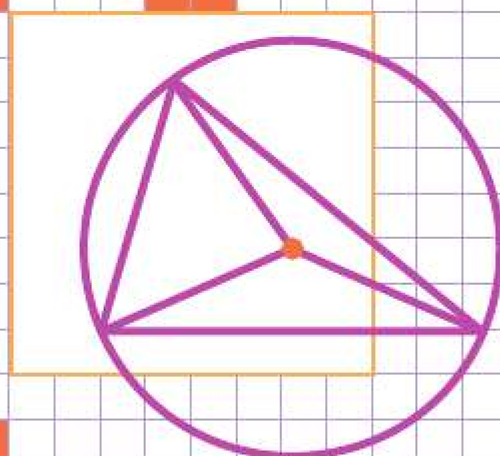
вентана граф

российский
учебник

А. Г. Мерзляк
В. М. Поляков

ГЕОМЕТРИЯ

8 класс



Учебник

Под редакцией В. Е. Подольского

Рекомендовано
Министерством просвещения
Российской Федерации

Москва
Издательский центр
«Вентана-Граф»
2019

От авторов

Дорогие восьмиклассники!

Мы надеемся, что вы не разочаровались, выбрав нелёгкий путь обучения в математическом классе.

В этом учебном году вы продолжите изучать геометрию по углублённой программе. Надеемся, что этому будет способствовать учебник, который вы держите в руках.

Ознакомьтесь, пожалуйста, с его структурой.

Учебник разделён на пять глав, каждая из которых состоит из параграфов. В параграфах изложен теоретический материал. Особое внимание обращайте на текст, напечатанный **жирным шрифтом**, ***жирным курсивом*** и *курсивом*. Так в книге выделены определения, правила и важнейшие математические утверждения.

Как правило, изложение теоретического материала завершается примерами решения задач. Эти записи можно рассматривать как один из возможных образцов оформления решения.

К каждому параграфу подобраны задачи для самостоятельного решения, к которым мы советуем приступать только после усвоения теоретического материала. Среди заданий есть как простые и средние по сложности упражнения, так и трудные задачи.

Желаем успеха!

Условные обозначения

◆

Простые задачи

◆ ◆

Задачи среднего уровня сложности

◆ ◆ ◆

Сложные задачи

Задачи высокой сложности

Ключевые задачи, результат которых можно использовать при решении других задач

Окончание доказательства теоремы

Окончание доказательства следствия

Окончание доказательства леммы

Окончание решения задачи

2.1 Задания, рекомендуемые для устной работы

2.3 Задания, рекомендуемые для домашней работы

Глава

1 Многоугольники. Четырёхугольники

В этой главе вы ознакомитесь с многоугольниками и их частными видами. Изучите свойства и признаки параллелограмма, прямоугольника и ромба. Ознакомитесь с трапецией и её видами.

§ 1 Многоугольник и его элементы

Отрезки AB и BC, изображённые на рисунке 1.1, имеют только одну общую точку B, которая является концом каждого из них. Такие отрезки называют **соседними**. На рисунке 1.2 каждые два отрезка являются соседними.

Отрезки AB и CD на рисунке 1.3 не являются соседними.

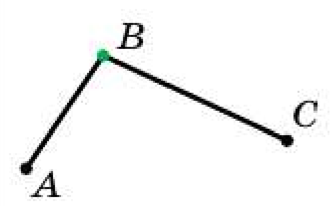


Рис. 1.1

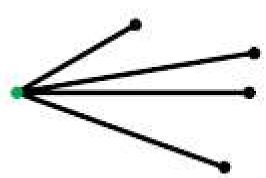
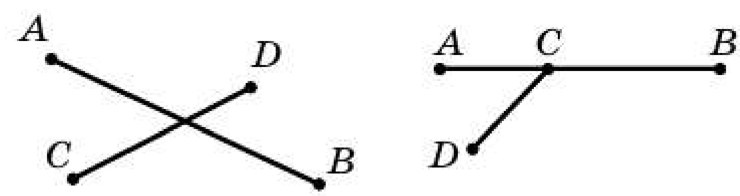


Рис. 1.2



а б

Рис. 1.3

Рассмотрим фигуру, состоящую из точек A_1, A_2, A_3, ..., A_{n-1}, A_n и отрезков A_1A_2, A_2A_3, ..., $A_{n-1}A_n$, A_nA_1 таких, что никакие два соседних отрезка не лежат на одной прямой и никакие два несоседних отрезка не имеют общих точек (рис. 1.4).

Фигура, образованная этими отрезками, ограничивает часть плоскости, выделенную на рисунке 1.5 зелёным цветом. Эту часть плоскости вместе с отрезками A_1A_2, A_2A_3, ..., $A_{n-1}A_n$, A_nA_1 называют **мно-**

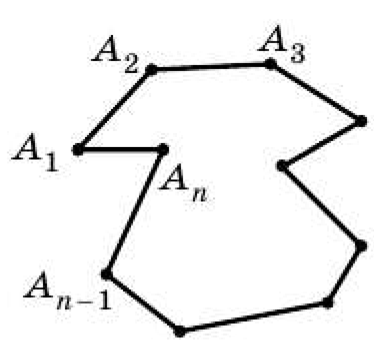


Рис. 1.4

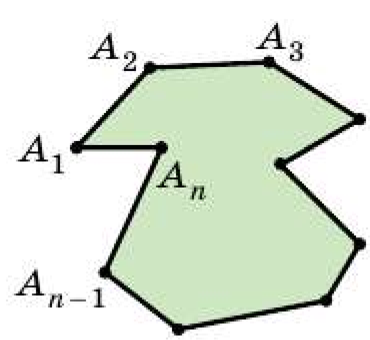


Рис. 1.5

гоугольником. Точки A_1, A_2, A_3, ..., A_{n-1}, A_n называют **вершинами** многоугольника, а указанные выше отрезки — **сторонами** многоугольника.

Стороны, являющиеся соседними отрезками, называют **соседними сторонами** многоугольника. Вершины, являющиеся концами одной стороны, называют **соседними вершинами** многоугольника.

Две соседние стороны многоугольника задают **угол многоугольника**. Например, α, β, γ, δ — углы многоугольника (рис. 1.6), а угол φ не является углом многоугольника.

Многоугольник называют по количеству его углов: треугольник, четырёхугольник, пятиугольник и т. п.

Многоугольник обозначают по его вершинам. Например, на рисунке 1.7 изображён пятиугольник $ABCDE$. В обозначении многоугольника буквы, стоящие рядом, соответствуют соседним вершинам. Например, пятиугольник, изображённый на рисунке 1.7, можно обозначить ещё и так: $CDEAB$, $EABCD$ и т. д.

Периметром многоугольника называют сумму длин всех его сторон.

Отрезок, соединяющий несоседние вершины многоугольника, называют **диагональю многоугольника**. Например, на рисунке 1.8 отрезок AE — диагональ многоугольника.

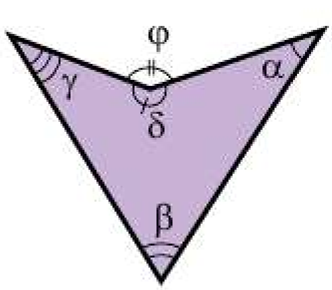


Рис. 1.6

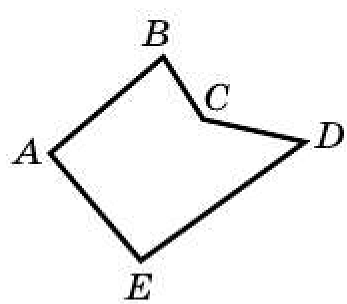


Рис. 1.7

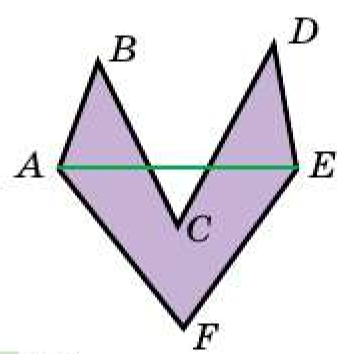


Рис. 1.8

На рисунке 1.9 изображён многоугольник, все углы которого меньше развёрнутого. Такой многоугольник называют **выпуклым.** Заметим, что многоугольники, изображённые на рисунках 1.6, 1.7, 1.8, не являются выпуклыми.

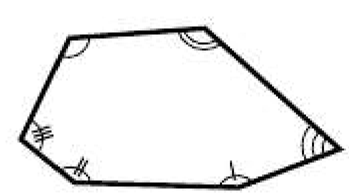


Рис. 1.9

Выпуклый многоугольник обладает такими свойствами:

1) выпуклый многоугольник расположен в одной полуплоскости относительно любой прямой, содержащей его сторону (рис. 1.10);

2) выпуклый многоугольник содержит любую свою диагональ (рис. 1.11).

Так как ни один невыпуклый многоугольник такими свойствами не обладает (рис. 1.12, 1.8), то каждое из них можно рассматривать как признак выпуклости многоугольника.

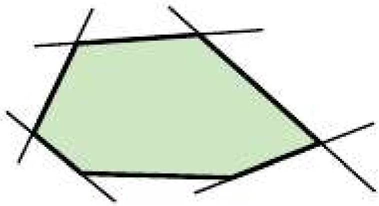


Рис. 1.10

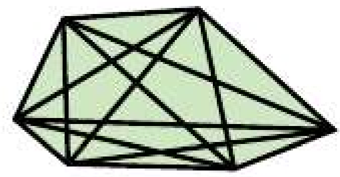


Рис. 1.11

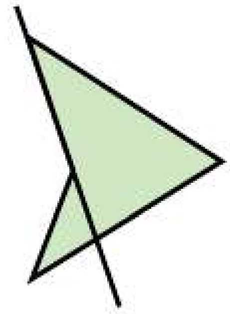


Рис. 1.12

Теорема 1.1

Сумма углов выпуклого n-угольника равна $180°(n-2)$.

Доказательство

На рисунке 1.13 изображён выпуклый n-угольник $A_1A_2A_3...A_{n-1}A_n$. Все его диагонали, выходящие из вершины A_1, разбивают данный многоугольник на $n-2$ треугольника. Сумма всех углов этих треугольников равна сумме углов n-угольника. Поскольку сумма углов каждого треугольника равна $180°$, то искомая сумма равна $180°(n-2)$. ■

Отметим, что эта теорема справедлива и для невыпуклого многоугольника.

На рисунке 1.14 изображён выпуклый n-угольник $A_1A_2...A_{n-1}A_n$. Угол 1 является смежным с углом 2 многоугольника. Угол 1 называют **внешним углом** при вершине A_1 выпуклого многоугольника $A_1A_2...A_n$.

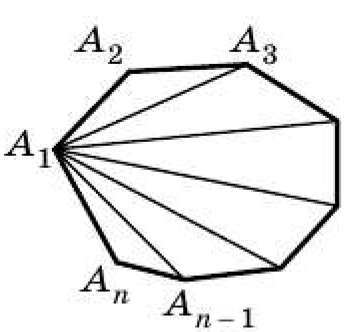


Рис. 1.13

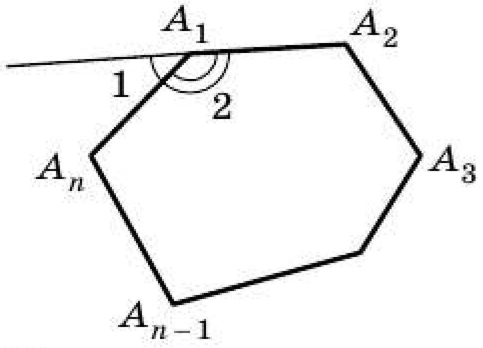


Рис. 1.14

Теорема 1.2

Сумма внешних углов выпуклого n-угольника, взятых по одному при каждой вершине, равна $360°$.

Доказательство

Сумма угла многоугольника и угла, смежного с ним, равна $180°$. Поэтому сумма всех углов многоугольника и внешних углов многоугольника, взятых по одному при каждой вершине, равна $180°n$. По теореме 1.1 сумма углов многоугольника равна $180°(n - 2)$. Поэтому сумма внешних углов равна $180°n - 180°(n - 2) = 360°$. ■

В курсе геометрии 7 класса вы изучали свойства треугольников. В этом параграфе мы будем изучать свойства другого вида многоугольника — четырёхугольника (рис. 1.15, 1.16).

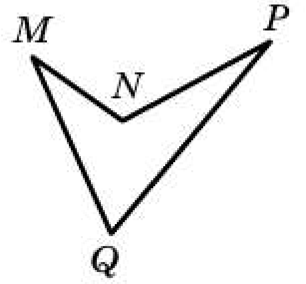


Рис. 1.15

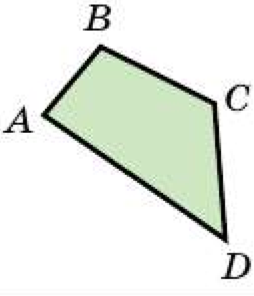


Рис. 1.16

Ясно, что все понятия, введённые для n-угольника, относятся и к четырёхугольнику.

В четырёхугольнике несоседние стороны и несоседние вершины называют соответственно **противолежащими сторонами** и **противолежащими вершинами**. На рисунке 1.15 изображён четырёхугольник, у которого, например, стороны NP и MQ противолежащие, вершины M и P противолежащие.

Углы ABC и ADC называют **противолежащими углами** четырёхугольника $ABCD$ (рис. 1.16). Также противолежащими являются углы BAD и BCD.

Задача 1. Докажите, что любой выпуклый n-угольник имеет не более трёх острых углов.

Решение. Пусть выпуклый n-угольник имеет четыре острых угла. Тогда сумма внешних углов, соответствующих этим острым углам, больше $360°$, что противоречит теореме 1.2. ■

Задача 2. Докажите, что количество диагоналей n-угольника равно $\frac{n(n-3)}{2}$, где $n \in N$, $n > 3$.

Решение. Из одной вершины n-угольника можно провести $(n - 3)$ диагонали (нельзя провести диагонали в саму выбранную вершину и в две соседние вершины). Так как имеем n вершин, то, казалось бы, общее количество диагоналей равно $n(n - 3)$. Но при таком способе подсчёта каждую диагональ учли дважды. Следовательно, количество диагоналей равно $\frac{n(n-3)}{2}$. ■

Задача 3. Докажите, что длина любой стороны четырёхугольника меньше суммы длин трёх других его сторон.

Решение. Рассмотрим произвольный четырёхугольник $ABCD$ (рис. 1.17). Покажем, например, что $AB < AD + DC + CB$.

Проведём диагональ AC. Применяя неравенство треугольника для сторон AB и AC соответственно треугольников ABC и ADC, получаем неравенства $AB < AC + CB$, $AC < AD + DC$.

Отсюда $AB < AC + CB < AD + DC + CB$.

Следовательно, $AB < AD + DC + CB$. ■

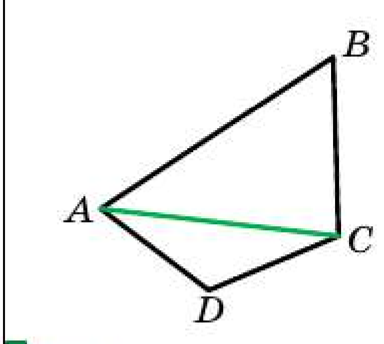


Рис. 1.17

Задача 4. Можно ли выпуклый 32-угольник разрезать на 20 треугольников, три выпуклых четырёхугольника и один выпуклый пятиугольник?

Решение. Очевидно, что сумма углов данного 32-угольника не больше суммы углов всех многоугольников, на которые он разрезан. Тогда имеем:

$180° \cdot (32 - 2) \leqslant 20 \cdot 180° + 3 \cdot 180° \cdot (4 - 2) + 180° \cdot (5 - 2)$;

$30 \leqslant 29$.

Получили противоречие. Следовательно, таким образом разрезать выпуклый 32-угольник невозможно. ■

?

1. Объясните, какие отрезки называют соседними.
2. Объясните, какую фигуру называют многоугольником.
3. Что называют периметром многоугольника?
4. Какой многоугольник называют выпуклым?
5. Чему равна сумма углов выпуклого n-угольника?
6. Чему равна сумма внешних углов выпуклого n-угольника, взятых по одному при каждой вершине?

Упражнения

1.1. Найдите сумму углов выпуклого: 1) пятиугольника; 2) восьмиугольника; 3) двадцатичетырёхугольника.

1.2. Найдите сумму углов выпуклого: 1) девятиугольника; 2) шестнадцатиугольника.

1.3. Существует ли выпуклый многоугольник, сумма углов которого равна: 1) $1800°$; 2) $720°$; 3) $1600°$?

1.4. Существует ли многоугольник, каждый угол которого равен: 1) $150°$; 2) $100°$?

1.5. Один из углов четырёхугольника в 2 раза меньше второго угла, на $20°$ меньше третьего и на $40°$ больше четвёртого. Найдите углы четырёхугольника.

1.6. Найдите углы четырёхугольника, если они пропорциональны числам 2, 3, 10 и 21. Является ли этот четырёхугольник выпуклым?

1.7. Найдите углы четырёхугольника, если три его угла пропорциональны числам 4, 5 и 7, а четвёртый угол равен их полусумме. Является ли этот четырёхугольник выпуклым?

1.8. В четырёхугольнике $ABCD$ стороны AB и BC равны, а диагональ BD образует с этими сторонами равные углы. Докажите, что стороны CD и AD равны.

1.9. Сколько диагоналей можно провести: 1) в девятиугольнике; 2) в двадцатиугольнике?

1.10. В треугольнике ABC $\angle A = 44°$, $\angle B = 56°$. Биссектрисы AK и BM треугольника пересекаются в точке O. Найдите углы четырёхугольника: 1) $MOKC$; 2) $AOBC$.

1.11. В треугольнике ABC $\angle A = 36°$, $\angle B = 72°$. Высоты AE и BF треугольника пересекаются в точке H. Найдите углы четырёхугольника: 1) $CFHE$; 2) $ACBH$.

1.12. Найдите диагональ четырёхугольника, если его периметр равен 80 см, а периметры треугольников, на которые эта диагональ разбивает данный четырёхугольник, равны 36 см и 64 см.

1.13. Могут ли стороны четырёхугольника быть равными:
1) 2 дм, 3 дм, 4 дм, 9 дм; 2) 2 дм, 3 дм, 4 дм, 10 дм?

◆ ◆

1.14. Три угла выпуклого многоугольника равны по $100°$, а остальные — по $120°$. Определите количество сторон многоугольника.

1.15. Докажите, что если углы выпуклого шестиугольника равны, то его стороны образуют три пары параллельных сторон.

1.16. В четырёхугольнике $ABCD$ $\angle A = \angle C = 90°$. Докажите, что биссектрисы двух других углов четырёхугольника либо параллельны, либо лежат на одной прямой.

1.17. Докажите, что если биссектрисы двух противолежащих углов выпуклого четырёхугольника параллельны или лежат на одной прямой, то два других угла четырёхугольника равны.

1.18. Постройте четырёхугольник по его сторонам и одному из углов.

1.19. Постройте четырёхугольник по трём сторонам и двум диагоналям.

1.20. Постройте четырёхугольник по его сторонам и одной из диагоналей.

1.21. Сумма углов выпуклого n-угольника и одного из его внешних углов равна $990°$. Найдите n.

1.22. Можно ли выпуклый семнадцатиугольник разрезать на 14 треугольников?

1.23. Докажите, что в выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ выполняется неравенство $AC + BD > AB + CD$.

1.24. Докажите, что в выпуклом четырёхугольнике сумма диагоналей меньше периметра, но больше полупериметра четырёхугольника.

1.25. Постройте четырёхугольник $ABCD$ по углам A и B, сторонам AB и BC и сумме сторон AD и CD.

1.26. Серединные перпендикуляры сторон AB и CD четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке K, принадлежащей стороне AD. Докажите, что если $\angle A = \angle D$, то диагонали четырёхугольника $ABCD$ равны.

1.27. Вершины выпуклого пятиугольника соединены через одну (рис. 1.18). Найдите сумму углов при вершинах полученной «звезды».

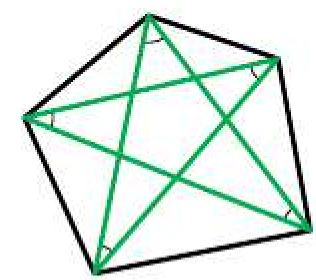


Рис. 1.18

1.28. Биссектрисы углов A и B выпуклого четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке M, а биссектрисы углов C и D — в точке N. Известно, что $MN \perp AB$. Докажите, что углы A и B равны.

1.29. Градусная мера каждого из углов выпуклого девятнадцатиугольника кратна $10°$. Докажите, что в этом девятнадцатиугольнике есть пара параллельных сторон.

1.30. Выпуклый n-угольник можно разрезать на несколько равносторонних треугольников. Найдите наибольшее значение n.

1.31. Докажите, что любой выпуклый многоугольник можно разрезать на равнобедренные треугольники.

1.32. В четырёхугольнике $ABCD$ сумма углов ABD и BDC равна $180°$, а стороны AD и BC равны (рис. 1.19). Докажите, что $\angle BAD = \angle BCD$.

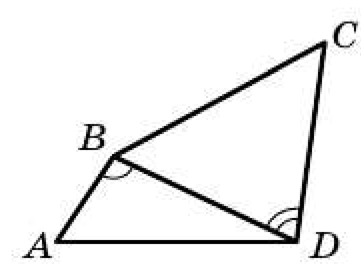


Рис. 1.19

1.33. Сколько в выпуклом многоугольнике может быть сторон, равных наибольшей диагонали?

Параллелограмм. Свойства параллелограмма

Определение

Параллелограммом называют четырёхугольник, у которого каждые две противолежащие стороны параллельны.

На рисунке 2.1 изображён параллелограмм $ABCD$. По определению параллелограмма имеем: $AB \parallel CD$, $BC \parallel AD$.

Рассмотрим некоторые свойства параллелограмма.

Теорема 2.1

Противолежащие стороны параллелограмма равны.

Доказательство

На рисунке 2.1 изображён параллелограмм $ABCD$. Докажем, что $AB = CD$ и $BC = AD$.

Проведём диагональ AC. Докажем, что треугольники ABC и CDA равны (рис. 2.2).

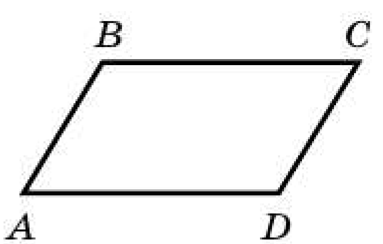


Рис. 2.1

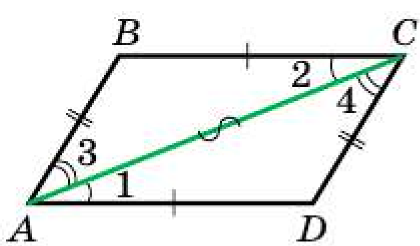


Рис. 2.2

В этих треугольниках сторона AC — общая, углы 1 и 2 равны как накрест лежащие при параллельных прямых BC и AD и секущей AC, углы 3 и 4 равны как накрест лежащие при параллельных прямых AB и CD и секущей AC. Следовательно, треугольники ABC и CDA равны по второму признаку равенства треугольников. Отсюда $AB = CD$ и $BC = AD$. ■

Теорема 2.2

Противолежащие углы параллелограмма равны.

Доказательство

На рисунке 2.1 изображён параллелограмм $ABCD$. Докажем, что $\angle B = \angle D$ и $\angle A = \angle C$.

При доказательстве предыдущей теоремы было установлено, что $\triangle ABC = \triangle CDA$ (рис. 2.2). Отсюда $\angle B = \angle D$. Из равенства углов 1 и 2 и равенства углов 3 и 4 следует, что $\angle 1 + \angle 3 = \angle 2 + \angle 4$. Следовательно, $\angle BAD = \angle BCD$. ■

Теорема 2.3

Диагонали параллелограмма точкой пересечения делятся пополам.

Доказательство

На рисунке 2.3 изображён параллелограмм $ABCD$, диагонали которого пересекаются в точке O. Докажем, что $AO = OC$ и $BO = OD$.

Рассмотрим треугольники AOD и COB. Имеем: $\angle 1$ и $\angle 2$, $\angle 3$ и $\angle 4$ равны как накрест лежащие при параллельных прямых AD и BC и секущих AC и BD соответственно. Из теоремы 2.1 получаем: $AD = BC$. Следовательно, треугольники AOD и COB равны по второму признаку равенства треугольников. Отсюда $AO = OC$, $BO = OD$. ■

Определение

Высотой параллелограмма называют перпендикуляр, опущенный из любой точки прямой, содержащей сторону параллелограмма, на прямую, содержащую противолежащую сторону.

На рисунке 2.4 каждый из отрезков AF, QE, BM, PN, CK является высотой параллелограмма $ABCD$.

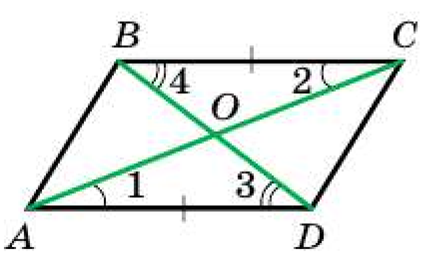


Рис. 2.3

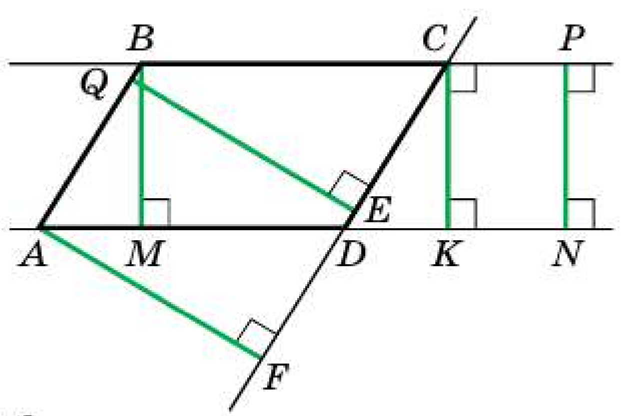


Рис. 2.4

Из курса геометрии 7 класса вы знаете, что все точки одной из двух параллельных прямых равноудалены от второй прямой. Поэтому $AF = QE$ и $BM = PN = CK$.

Говорят, что **высоты** BM, CK и PN **проведены к сторонам** BC и AD, а высоты AF и QE — к сторонам AB и CD.

Теорема 2.4

Прямые, содержащие высоты треугольника, пересекаются в одной точке.

Доказательство

Через каждую вершину данного треугольника ABC проведём прямую, параллельную противолежащей стороне. Получим треугольник $A_1B_1C_1$ (рис. 2.5).

Из построения следует, что четырёхугольники AC_1BC и $ABCB_1$ — параллелограммы. Отсюда $AC_1 = BC = AB_1$. Следовательно, точка A является серединой отрезка B_1C_1.

Поскольку прямые B_1C_1 и BC параллельны, то высота AH треугольника ABC перпендикулярна отрезку B_1C_1. Таким образом, прямая AH — серединный перпендикуляр стороны B_1C_1 треугольника $A_1B_1C_1$. Аналогично можно доказать, что прямые, содержащие две другие высоты треугольника ABC, являются серединными перпендикулярами сторон C_1A_1 и A_1B_1 треугольника $A_1B_1C_1$.

Так как серединные перпендикуляры сторон треугольника пересекаются в одной точке, то утверждение теоремы доказано. ■

Точку, в которой пересекаются прямые, содержащие высоты треугольника, называют **ортоцентром** треугольника.

Задача 1. Биссектриса тупого угла параллелограмма делит сторону в отношении 2 : 1, считая от вершины острого угла. Найдите стороны параллелограмма, если его периметр равен 60 см.

Решение. Пусть биссектриса тупого угла B параллелограмма $ABCD$ (рис. 2.6) пересекает сторону AD в точке M. По условию $AM : MD = 2 : 1$.

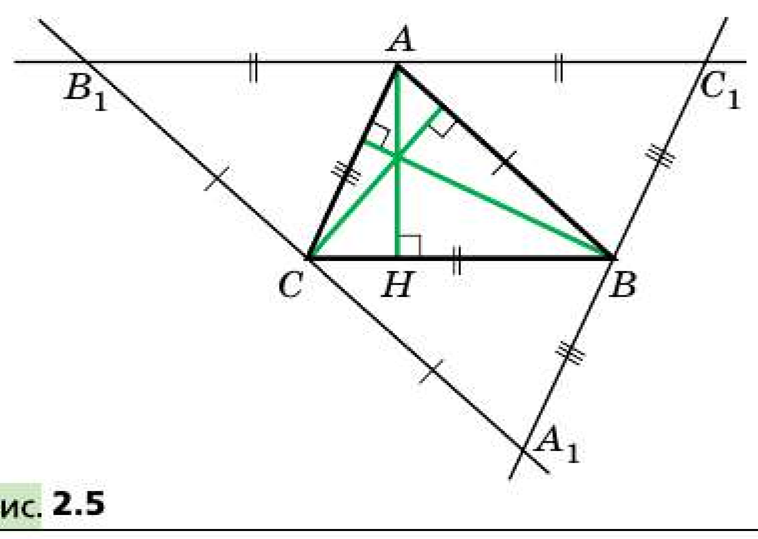


Рис. 2.5

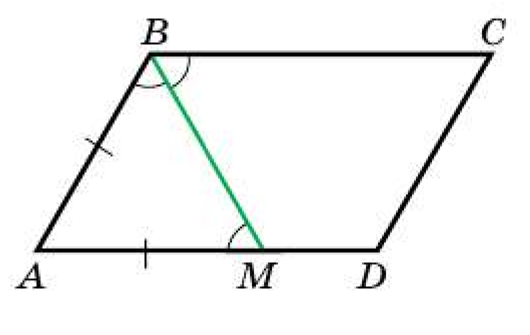


Рис. 2.6

Углы ABM и CBM равны по условию.

Углы CBM и AMB равны как накрест лежащие при параллельных прямых BC и AD и секущей BM.

Тогда $\angle ABM = \angle AMB$. Следовательно, треугольник BAM равнобедренный, отсюда $AB = AM$.

Пусть $MD = x$ см, тогда $AB = AM = 2x$ см, $AD = 3x$ см. Поскольку противолежащие стороны параллелограмма равны, то его периметр равен $2(AB + AD)$. Учитывая, что по условию периметр параллелограмма равен 60 см, получаем:

$$2(2x + 3x) = 60;$$
$$x = 6.$$

Следовательно, $AB = 12$ см, $AD = 18$ см.

Ответ: 12 см, 18 см. ■

Задача 2. На сторонах AB и BC параллелограмма $ABCD$ вне его построены равносторонние треугольники ABE и BCF (рис. 2.7). Докажите, что треугольник EDF равносторонний.

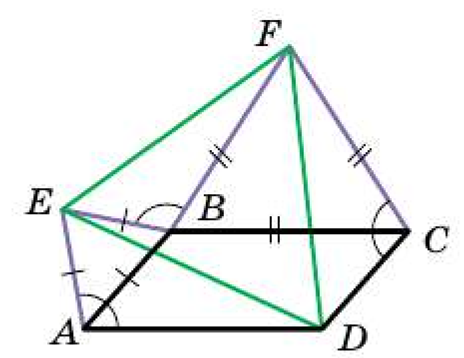


Рис. 2.7

Решение. Пусть $\angle BAD = \alpha$. Тогда $\angle EAD = \angle FCD = 60^\circ + \alpha$.

Имеем: $\angle EBA = \angle FBC = 60^\circ$, $\angle ABC = 180^\circ - \alpha$. Тогда $\angle EBF = 360^\circ - (60^\circ + 60^\circ + 180^\circ - \alpha) = 60^\circ + \alpha$.

Запишем: $EB = EA = AB = DC$, $BF = FC = BC = AD$. Следовательно, треугольники AED, CDF и BEF равны по двум сторонам и углу между ними. Из равенства этих треугольников следует, что $ED = FD = EF$. ■

?

1. Какой четырёхугольник называют параллелограммом?
2. Каким свойством обладают противолежащие стороны параллелограмма?
3. Каким свойством обладают противолежащие углы параллелограмма?
4. Каким свойством обладают диагонали параллелограмма?
5. Что называют высотой параллелограмма?
6. Сформулируйте теорему о прямых, содержащих высоты треугольника.

Упражнения

2.1. На рисунке 2.8 изображены параллелограммы. Определите, не выполняя измерений, на каких рисунках величины углов или длины отрезков обозначены неправильно (длины отрезков даны в сантиметрах).

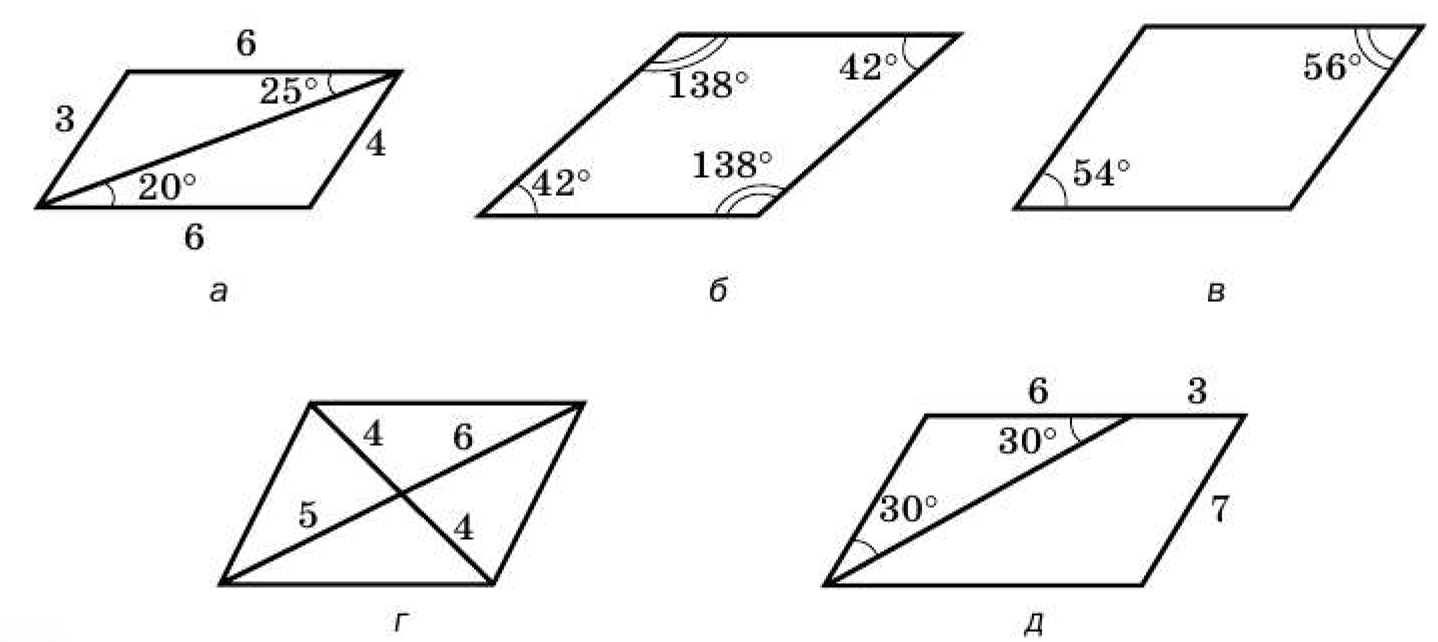


Рис. 2.8

2.2. Периметр параллелограмма равен 112 см. Найдите его стороны, если: 1) одна из них на 12 см меньше другой; 2) две его стороны относятся как 5 : 9.

2.3. Найдите стороны параллелограмма, если одна из них в 5 раз больше другой, а периметр параллелограмма равен 96 см.

2.4. В параллелограмме $ABCD$ $AB = 6$ см, $AC = 10$ см, $BD = 8$ см, O — точка пересечения его диагоналей. Найдите периметр треугольника COD.

2.5. Докажите, что сумма любых двух соседних углов параллелограмма равна 180°.

2.6. Найдите углы параллелограмма, если:
1) один из них равен 70°;
2) сумма двух его углов равна 100°;
3) разность двух его углов равна 20°;
4) два его угла относятся как 3 : 7.

2.7. Найдите углы параллелограмма, если один из них:
1) в 2 раза больше другого;
2) на 24° меньше другого.

2.8. Найдите углы параллелограмма $ABCD$ (рис. 2.9), если $\angle ABD = 68°$, $\angle ADB = 47°$.

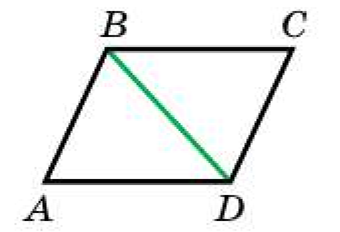


Рис. 2.9

2.9. В параллелограмме $ABCD$ диагональ AC образует со стороной AB угол, равный $32°$, $\angle BCD = 56°$. Найдите углы CAD и ADC.

2.10. Биссектрисы углов A и B параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке M. Определите величину угла M треугольника ABM.

2.11. Найдите углы параллелограмма $ABCD$, если $BD \perp AB$ и $BD = AB$.

2.12. Угол между высотой BH параллелограмма $ABCD$ и биссектрисой BM угла ABC равен $24°$. Найдите углы параллелограмма.

2.13. Диагональ параллелограмма образует с его сторонами углы $30°$ и $90°$. Найдите стороны параллелограмма, если его периметр равен 36 см.

2.14. Один из углов параллелограмма равен $45°$. Высота параллелограмма, проведённая из вершины тупого угла, равна 3 см и делит сторону параллелограмма пополам. Найдите эту сторону параллелограмма и углы, которые образует диагональ, соединяющая вершины тупых углов, со сторонами параллелограмма.

2.15. В параллелограмме $ABCD$ $\angle C = 30°$, высота BH, проведённая к стороне CD, равна 7 см, а периметр параллелограмма равен 46 см. Найдите стороны параллелограмма.

2.16. Докажите, что любой отрезок, который проходит через точку пересечения диагоналей параллелограмма и концы которого принадлежат противолежащим сторонам параллелограмма, делится этой точкой пополам.

2.17. Периметр параллелограмма $ABCD$ равен 24 см, $\angle ABC = 160°$, диагональ AC образует со стороной AD угол $10°$. Найдите стороны параллелограмма.

2.18. Диагональ BD параллелограмма $ABCD$ образует со стороной AB угол $65°$, $\angle C = 50°$, $AB = 8$ см. Найдите периметр параллелограмма.

2.19. Вне параллелограмма $ABCD$ проведена прямая, параллельная его диагонали BD. Эта прямая пересекает прямые AB, BC, CD и AD в точках E, M, F и K соответственно. Докажите, что $MK = EF$.

2.20. Параллельно диагонали AC параллелограмма $ABCD$ проведена прямая, пересекающая отрезки AB и BC в точках M и N, а прямые AD и CD в точках P и K соответственно. Докажите, что $PM = NK$.

2.21. Биссектриса угла A параллелограмма $ABCD$ пересекает сторону BC в точке M. Найдите периметр данного параллелограмма, если $AB = 12$ см, $MC = 16$ см.

2.22. Биссектриса острого угла параллелограмма делит его сторону в отношении 3 : 5, считая от вершины тупого угла. Найдите стороны параллелограмма, если его периметр равен 66 см.

2.23. В параллелограмме $ABCD$ $AD = 12$ см, $AB = 3$ см, биссектрисы углов B и C пересекают сторону AD в точках E и F соответственно. Найдите отрезок EF.

2.24. Докажите, что угол между высотами параллелограмма, проведёнными из вершины тупого угла, равен острому углу параллелограмма.

2.25. Докажите, что угол между высотами параллелограмма, проведёнными из вершины острого угла, равен тупому углу параллелограмма.

2.26. Угол между высотами параллелограмма, проведёнными из вершины острого угла, в 4 раза больше этого угла. Найдите углы параллелограмма.

2.27. Угол между высотами параллелограмма, проведёнными из вершины тупого угла, равен $30°$. Найдите периметр параллелограмма, если его высоты равны 4 см и 6 см.

2.28. Высоты параллелограмма, проведённые из вершины острого угла, образуют угол $150°$, стороны параллелограмма равны 10 см и 18 см. Найдите высоты параллелограмма.

2.29. Через произвольную точку основания равнобедренного треугольника проведены прямые, параллельные его боковым сторонам. Докажите, что периметр образовавшегося четырёхугольника равен сумме боковых сторон данного треугольника.

2.30. Через каждую вершину треугольника ABC проведена прямая, параллельная противолежащей стороне. Сумма периметров всех образовавшихся параллелограммов равна 100 см. Найдите периметр треугольника ABC.

2.31. Даны три точки, не лежащие на одной прямой. Постройте параллелограмм, вершинами которого являются данные точки. Сколько решений имеет задача?

2.32. Точка пересечения биссектрис двух соседних углов параллелограмма принадлежит его стороне. Найдите отношение соседних сторон параллелограмма.

2.33. На стороне BC параллелограмма $ABCD$ существует такая точка M, что $BM = MD = CD$. Найдите углы параллелограмма, если $AD = BD$.

2.34. В параллелограмме $ABCD$ биссектрисы углов A и D делят сторону BC на три равных отрезка. Найдите стороны параллелограмма, если его периметр равен 40 см.

2.35. Постройте параллелограмм:

1) по стороне, проведённой к ней высоте и диагонали;

2) по острому углу и двум высотам, проведённым к двум соседним сторонам.

2.36. Постройте параллелограмм:

1) по двум сторонам и высоте;

2) по диагонали и двум высотам, проведённым к двум соседним сторонам.

2.37. Биссектриса угла A параллелограмма $ABCD$ пересекает сторону BC в точке M, а биссектриса угла AMC проходит через точку D. Найдите углы параллелограмма, если $\angle MDC = 45°$.

2.38. Через вершины A, B и D параллелограмма $ABCD$ проведены прямые, перпендикулярные прямым BD, BC и CD соответственно. Докажите, что проведённые прямые пересекаются в одной точке.

2.39. Из вершины B параллелограмма $ABCD$ опустили перпендикуляр BE на диагональ AC. Через точку A проведена прямая m, перпендикулярная прямой AD, а через точку C — прямая n, перпендикулярная прямой CD. Докажите, что точка пересечения прямых m и n принадлежит прямой BE.

2.40. Окружность, вписанная в треугольник, касается его сторон AB, BC и AC соответственно в точках C_1, A_1 и B_1. Через точки A_1, B_1 и C_1 проведены прямые, параллельные биссектрисам углов A, B и C соответственно. Докажите, что проведённые прямые пересекаются в одной точке.

2.41. В треугольнике ABC сторона AC наименьшая. На сторонах AB и CB отметили точки K и L соответственно так, что $KA = AC = CL$. Отрезки AL и KC пересекаются в точке M. Докажите, что $MJ \perp AC$, где J — центр вписанной окружности треугольника ABC.

2.42. Постройте параллелограмм по стороне, сумме диагоналей и углу между диагоналями.

2.43. Через точку, принадлежащую углу, проведите прямую так, чтобы отрезок этой прямой, заключённый внутри угла, данной точкой делился пополам.

2.44. Точки A и C принадлежат углу, но не принадлежат его сторонам. Постройте параллелограмм $ABCD$ так, чтобы вершины B и D принадлежали сторонам данного угла.

2.45. На сторонах AB и BC треугольника ABC постройте соответственно такие точки M и K, чтобы $AM = BK$ и $MK \parallel AC$.

2.46. Отрезки AB и CD длиной 1 пересекаются в точке O так, что $\angle AOC = 60°$. Докажите, что $AC + BD \geqslant 1$.

2.47. Точки M, N и K — соответственно середины равных сторон AB, BC и CD четырёхугольника $ABCD$. Постройте по этим точкам четырёхугольник $ABCD$.

2.48. Через каждую вершину параллелограмма проведена прямая, перпендикулярная диагонали, не проходящей через эту вершину (рис. 2.10). Докажите, что диагонали четырёхугольника, образованного пересечениями четырёх проведённых прямых, перпендикулярны сторонам параллелограмма.

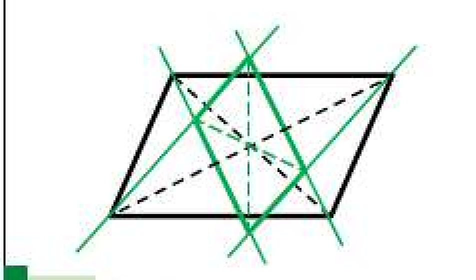


Рис. **2.10**

2.49. На линейку нанесена шкала с ценой деления 1 см. С помощью этой линейки проведите прямую, перпендикулярную данной прямой.

§ 3 Признаки параллелограмма

Определение параллелограмма позволяет среди четырёхугольников распознавать параллелограммы. Этой же цели служат следующие три теоремы, которые называют признаками параллелограмма.

Теорема 3.1

(обратная теореме 2.1)

Если в четырёхугольнике каждые две противолежащие стороны равны, то этот четырёхугольник — параллелограмм.

Доказательство

На рисунке 3.1 изображён четырёхугольник $ABCD$, в котором $AB = CD$ и $BC = AD$. Докажем, что четырёхугольник $ABCD$ — параллелограмм.

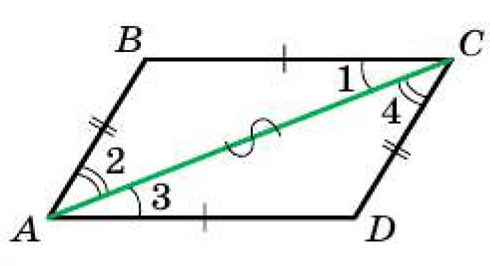


Рис. **3.1**

Проведём диагональ AC. Треугольники ABC и CDA равны по третьему признаку равенства треугольников. Отсюда $\angle 1 = \angle 3$ и $\angle 2 = \angle 4$. Углы 1 и 3 являются накрест лежащими при прямых BC и AD и секущей AC. Следовательно, $BC \parallel AD$. Аналогично из равенства $\angle 2 = \angle 4$ следует, что $AB \parallel CD$.

Таким образом, в четырёхугольнике $ABCD$ каждые две противолежащие стороны параллельны, поэтому этот четырёхугольник — параллелограмм. ■

Теорема 3.2

Если в четырёхугольнике две противолежащие стороны равны и параллельны, то этот четырёхугольник — параллелограмм.

Доказательство

На рисунке 3.2 изображён четырёхугольник $ABCD$, в котором $BC = AD$ и $BC \parallel AD$. Докажем, что четырёхугольник $ABCD$ — параллелограмм.

Проведём диагональ AC. В треугольниках ABC и CDA имеем: $BC = AD$ по условию, углы 1 и 2 равны как накрест лежащие при параллельных прямых BC и AD и секущей AC, а сторона AC общая. Следовательно, треугольники ABC и CDA равны по первому признаку равенства треугольников. Отсюда $AB = CD$. Значит, в четырёхугольнике $ABCD$ каждые две противолежащие стороны равны. Поэтому по теореме 3.1 четырёхугольник $ABCD$ — параллелограмм. ■

Теорема 3.3

(обратная теореме 2.3)

Если в четырёхугольнике диагонали точкой пересечения делятся пополам, то этот четырёхугольник — параллелограмм.

Доказательство

На рисунке 3.3 изображён четырёхугольник $ABCD$, в котором диагонали AC и BD пересекаются в точке O, причём $AO = OC$ и $BO = OD$. Докажем, что четырёхугольник $ABCD$ — параллелограмм.

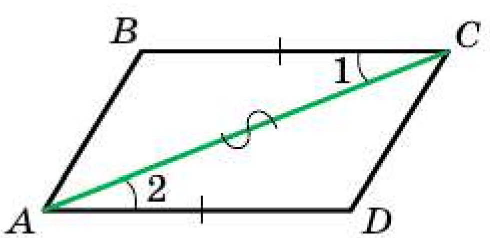


Рис. 3.2

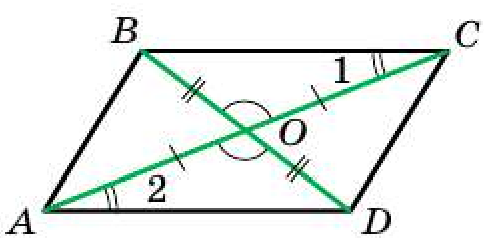


Рис. 3.3

Поскольку углы BOC и DOA равны как вертикальные, $AO = OC$ и $BO = OD$, то треугольники BOC и DOA равны по первому признаку равенства треугольников. Отсюда $BC = AD$ и $\angle 1 = \angle 2$. Углы 1 и 2 являются накрест лежащими при прямых BC и AD и секущей AC. Следовательно, $BC \parallel AD$.

Таким образом, в четырёхугольнике $ABCD$ две противолежащие стороны равны и параллельны. По теореме 3.2 четырёхугольник $ABCD$ — параллелограмм. ■

Вы знаете, что треугольник можно однозначно задать его сторонами, т. е. задача построения треугольника по трём сторонам имеет единственное решение. Иначе обстоит дело с параллелограммом. На рисунке 3.4 изображены параллелограммы $ABCD$, $A_1B_1C_1D_1$ и $A_2B_2C_2D_2$, стороны которых равны, т. е. $AB = A_1B_1 = A_2B_2$ и $BC = B_1C_1 = B_2C_2$. Однако очевидно, что сами параллелограммы не равны.

Сказанное означает, что если четыре рейки скрепить так, чтобы образовался параллелограмм, то полученная конструкция не будет жёсткой.

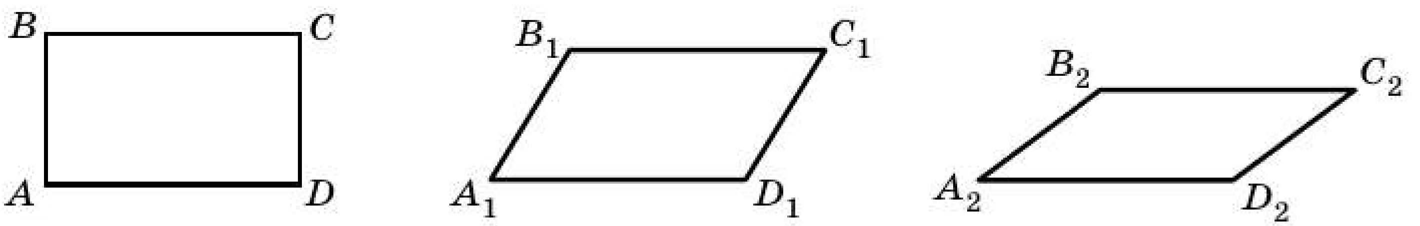


Рис. 3.4

Это свойство параллелограмма широко используют на практике. Благодаря его подвижности лампу можно устанавливать в удобное для работы положение, а раздвижную решётку — отодвигать на нужное расстояние в дверном проёме (рис. 3.5).

На рисунке 3.6 изображена схема механизма, являющегося частью паровой машины. При увеличении скорости вращения оси шары

Рис. 3.5

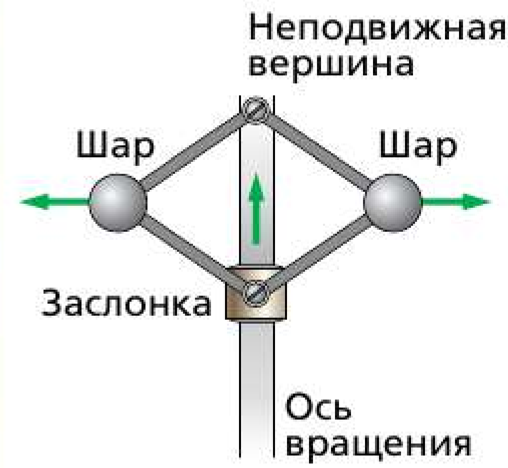


Рис. 3.6

отдаляются от неё под действием центробежной силы, тем самым поднимая заслонку, которая регулирует количество пара. Механизм назван **параллелограммом Уатта** в честь изобретателя первой универсальной паровой машины.

Задача 1. Докажите, что если в четырёхугольнике каждые два противолежащих угла равны, то этот четырёхугольник — параллелограмм.

Решение. На рисунке 3.7 изображён четырёхугольник $ABCD$, в котором $\angle A = \angle C$ и $\angle B = \angle D$. Докажем, что четырёхугольник $ABCD$ — параллелограмм.

По теореме о сумме углов выпуклого n-угольника (теорема 1.1) имеем: $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 360°$. Учитывая, что $\angle A = \angle C$ и $\angle B = \angle D$, получим: $\angle A + \angle B = \angle C + \angle D = 180°$.

Поскольку углы A и B — односторонние углы при прямых AD и BC и секущей AB, а их сумма равна 180°, то $BC \parallel AD$.

Аналогично можно доказать, что $AB \parallel CD$.

Следовательно, четырёхугольник $ABCD$ — параллелограмм. ■

Задача 2. Докажите, что медиана BM треугольника ABC меньше полусуммы сторон BA и BC.

Решение. На продолжении медианы BM за точку M отметим такую точку D, что $BM = MD$ (рис. 3.8). Тогда в четырёхугольнике $ABCD$ диагонали AC и DB точкой их пересечения делятся пополам. Следовательно, четырёхугольник $ABCD$ — параллелограмм. Отсюда $AB = DC$. Для сторон треугольника BDC можно записать: $BD < DC + BC$. Тогда $2BM < AB + BC$; $BM < \dfrac{AB + BC}{2}$. ■

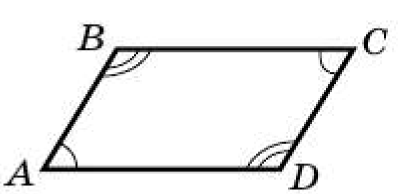


Рис. 3.7

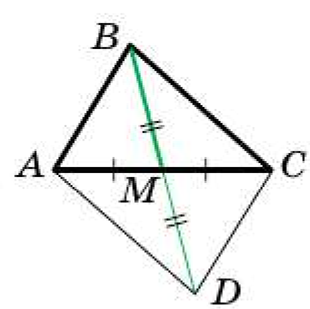


Рис. 3.8

1. Сформулируйте признаки параллелограмма.
2. Среди свойств и признаков параллелограмма укажите взаимно обратные теоремы.
3. Какое свойство параллелограмма широко используют на практике?

Упражнения

3.1. Докажите, что если сумма углов, прилежащих к любой из соседних сторон четырёхугольника, равна $180°$, то этот четырёхугольник — параллелограмм.

3.2. Четырёхугольники $ABCD$ и $AMKD$ — параллелограммы (рис. 3.9). Докажите, что четырёхугольник $BMKC$ — параллелограмм.

3.3. Отрезок AO — медиана треугольника ABD, отрезок BO — медиана треугольника ABC (рис. 3.10). Докажите, что четырёхугольник $ABCD$ — параллелограмм.

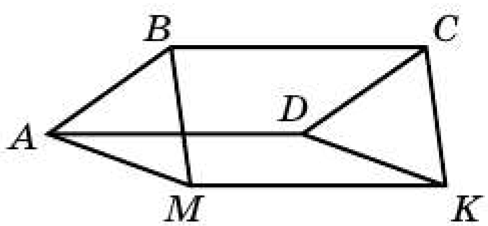


Рис. 3.9

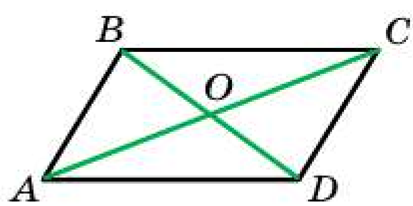


Рис. 3.10

3.4. На диагонали AC параллелограмма $ABCD$ отметили точки M и K так, что $AM = CK$. Докажите, что четырёхугольник $MBKD$ — параллелограмм.

3.5. Две окружности имеют общий центр O (рис. 3.11). В одной из окружностей проведён диаметр AB, в другой — диаметр CD. Докажите, что четырёхугольник $ACBD$ — параллелограмм.

3.6. Точки E и F — соответственно середины сторон BC и AD параллелограмма $ABCD$. Докажите, что четырёхугольник $AECF$ — параллелограмм.

3.7. На сторонах AB и CD параллелограмма $ABCD$ отложены равные отрезки AM и CK. Докажите, что четырёхугольник $MBKD$ — параллелограмм.

3.8. На сторонах параллелограмма $ABCD$ (рис. 3.12) отложены равные отрезки AM, BK, CE и DF. Докажите, что четырёхугольник $MKEF$ — параллелограмм.

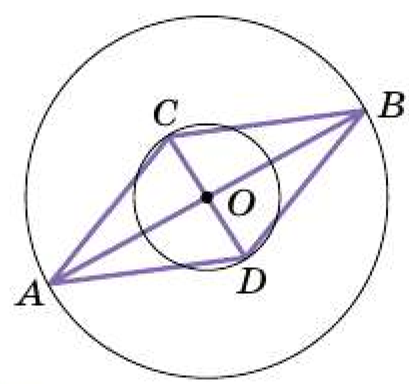


Рис. 3.11

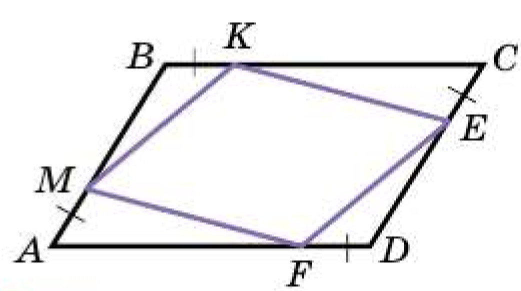


Рис. 3.12

3.9. В треугольнике ABC на продолжении медианы AM за точку M отложили отрезок MK, равный отрезку AM. Докажите, что четырёхугольник $ABKC$ является параллелограммом.

3.10. В четырёхугольнике $ABCD$ $AB \parallel CD$, $\angle A = \angle C$. Определите вид четырёхугольника $ABCD$.

3.11. Биссектриса угла A параллелограмма $ABCD$ пересекает сторону BC в точке M, а биссектриса угла C — сторону AD в точке K. Докажите, что четырёхугольник $AMCK$ — параллелограмм.

3.12. На рисунке 3.13 четырёхугольник $ABCD$ — параллелограмм, $\angle BCP = \angle DAE$. Докажите, что четырёхугольник $APCE$ — параллелограмм.

3.13. На рисунке 3.14 четырёхугольник $ABCD$ — параллелограмм, $\angle BEC = \angle DFA$. Докажите, что четырёхугольник $AECF$ — параллелограмм.

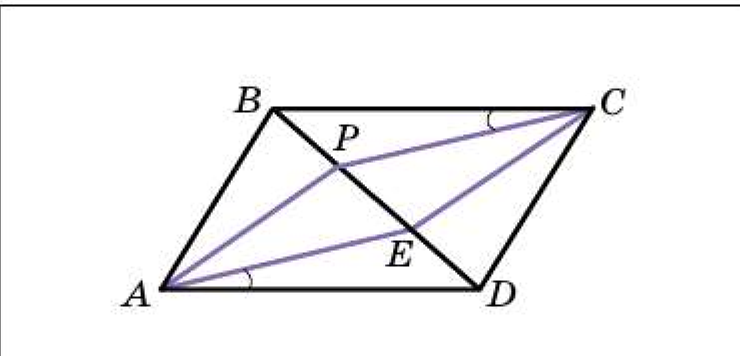


Рис. **3.13**

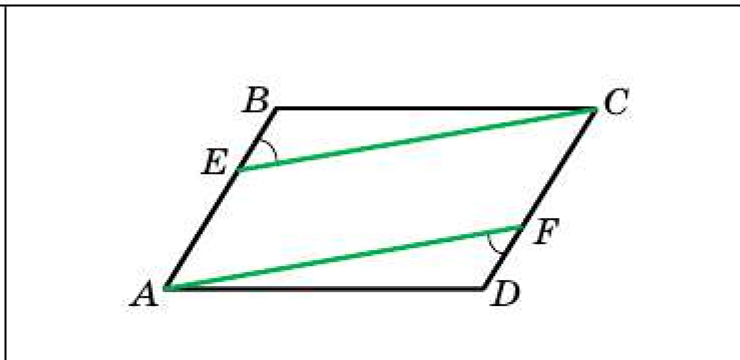


Рис. **3.14**

3.14. Из вершин B и D параллелограмма $ABCD$ провели перпендикуляры BM и DK к диагонали AC. Докажите, что четырёхугольник $BKDM$ — параллелограмм.

3.15. Биссектрисы углов A и C параллелограмма $ABCD$ пересекают его диагональ BD в точках E и F соответственно. Докажите, что четырёхугольник $AECF$ — параллелограмм.

3.16. Постройте параллелограмм:

1) по двум диагоналям и стороне;

2) по двум диагоналям и углу между ними;

3) по двум диагоналям и высоте.

3.17. Докажите, что если m_1, m_2 и m_3 — длины медиан треугольника, p — его полупериметр, то $m_1 + m_2 + m_3 < 2p$.

3.18. В треугольнике ABC медиана BM перпендикулярна стороне BC, $AB : BC = 2 : 1$. Найдите угол ABC.

3.19. Докажите признак равенства треугольников по медиане и углам, на которые она разбивает угол треугольника.

3.20. Докажите признак равенства треугольников по двум сторонам и медиане, проведённой к третьей стороне.

3.21. Отрезок AM — медиана треугольника ABC, $\angle CAM > \angle BAM$. Докажите, что $AB > AC$.

3.22. Через середину O диагонали NP параллелограмма $MNKP$ проведена прямая, пересекающая стороны MN и KP в точках A и B соответственно. Докажите, что четырёхугольник $ANBP$ — параллелограмм.

3.23. Через точку пересечения диагоналей параллелограмма $CDEF$ проведены две прямые, одна из которых пересекает стороны CD и EF в точках A и B соответственно, а другая — стороны DE и CF в точках M и K соответственно. Докажите, что четырёхугольник $AMBK$ — параллелограмм.

3.24. Точки M, N, K и P — середины сторон AB, BC, CD и AD параллелограмма $ABCD$ соответственно. Докажите, что четырёхугольник, вершинами которого являются точки пересечения прямых AN, BK, CP и DM, — параллелограмм.

◆ ◆ ◆

3.25. Постройте треугольник по стороне, высоте, проведённой к этой стороне, и медиане, проведённой к другой стороне.

3.26. Постройте треугольник ABC по медиане AM, высотам BB_1 и CC_1.

3.27. В шестиугольнике $ABCDEF$ стороны в парах AB и DE, BC и EF, AF и CD равны и параллельны. Докажите, что диагонали AD, BE и CF пересекаются в одной точке.

3.28. На стороне BC треугольника ABC отметили точку F. Отрезок AF пересекает медиану BD в точке E так, что $AE = BC$. Докажите, что $BF = FE$.

§ 4 Необходимые и достаточные условия

Из курса геометрии 7 класса вы узнали, что большинство теорем состоят из двух частей: условия (то, что дано) и заключения (то, что требуется доказать).

Если утверждение, выражающее условие, обозначить буквой A, а утверждение, выражающее заключение, — буквой B, то формулировку теоремы можно изобразить следующей схемой:

если A, то B.

Например, теорему 2.3 можно сформулировать так:

	A		***B***
если	четырёхугольник является параллелограммом,	**то**	диагонали четырёхугольника точкой пересечения делятся пополам

Тогда теорему 3.3, обратную теореме 2.3, можно сформулировать так:

	B		***A***
если	диагонали четырёхугольника точкой пересечения делятся пополам,	**то**	четырёхугольник является параллелограммом

Часто в повседневной жизни в своих высказываниях мы пользуемся словами «необходимо», «достаточно». Приведём несколько примеров.

- Для того чтобы уметь решать задачи, *необходимо* знать теоремы.
- Если вы на математической олимпиаде правильно решили все предложенные задачи, то этого *достаточно* для того, чтобы занять первое место.

Употребление слов «необходимо» и «достаточно» тесно связано с теоремами.

Рассмотрим такую теорему:

	A		***B***
если	натуральное число кратно 10,	**то**	это число кратно 5

Условие A является достаточным для заключения B. Вместе с тем делимость числа нацело на 5 (утверждение B) необходима для делимости числа нацело на 10 (утверждение A).

Приведём ещё один пример:

	A		***B***
если	два угла являются вертикальными,	**то**	эти углы равны

В этой теореме утверждение A является **достаточным условием** для утверждения B, т. е. для того, чтобы два угла были равны, *доста-*

точно, чтобы они были вертикальными. В этой же теореме утверждение B является **необходимым условием** для утверждения A, т. е. для того, чтобы два угла были вертикальными, *необходимо*, чтобы они были равны. Отметим, что утверждение B не является достаточным условием для утверждения A. Действительно, если два угла равны, то это совсем не означает, что они вертикальные.

Итак, в любой теореме вида **если *A*, то *B*** утверждение A является достаточным для утверждения B, а утверждение B — необходимым для утверждения A.

Если справедлива не только теорема

если *A*, то *B*,

но и обратная теорема

если *B*, то *A*,

то A является **необходимым и достаточным** условием для B, а B — необходимым и достаточным условием для A.

Например, теоремы 2.3 и 3.3 являются взаимно обратными. На языке «необходимо — достаточно» этот факт можно сформулировать одним из двух способов:

- ***для того чтобы четырёхугольник был параллелограммом, необходимо и достаточно, чтобы его диагонали точкой пересечения делились пополам***;
- ***для того чтобы диагонали четырёхугольника точкой пересечения делились пополам, необходимо и достаточно, чтобы этот четырёхугольник был параллелограммом.***

Подчеркнём, что если в теореме есть слова «необходимо и достаточно», то она объединяет две теоремы: прямую и обратную (прямой теоремой может быть любая из двух теорем, тогда другая будет обратной). Следовательно, доказательство такой теоремы должно состоять из двух частей: доказательств прямой и обратной теорем. Теорему, объединяющую прямую и обратную теоремы, называют **критерием.**

Иногда вместо «необходимо и достаточно» говорят «тогда и только тогда». Например, взаимно обратные теоремы 2.1 и 3.1 можно объединить в следующий критерий:

четырёхугольник является параллелограммом тогда и только тогда, когда каждые две его противолежащие стороны равны.

?

1. Из каких двух частей состоит большинство теорем?

2. Приведите примеры из повседневной жизни, когда мы в своих высказываниях пользуемся словами «необходимо» и «достаточно».

3. Формулировка теоремы представлена в виде схемы «если A, то B». Как называют утверждения A и B?

4. Что означает, если в формулировке теоремы присутствуют слова «необходимо и достаточно»?

5. Какую теорему называют критерием?

Упражнения

4.1. В формулировке теоремы укажите необходимое условие и достаточное условие:

1) если углы смежные, то их сумма равна $180°$;

2) если треугольник равносторонний, то он равнобедренный;

3) если прямые a и b перпендикулярны прямой c, то $a \parallel b$;

4) если два треугольника равны, то равны их соответственные углы;

5) если диаметр перпендикулярен хорде, то он делит её пополам.

4.2. Сформулируйте теорему, обратную данной. Полученную пару взаимно обратных теорем замените одной теоремой, используя язык «необходимо — достаточно».

1) Если точка принадлежит серединному перпендикуляру отрезка, то она равноудалена от концов отрезка.

2) Если треугольник равнобедренный, то два его угла равны.

3) Если медиана треугольника совпадает с его высотой, то треугольник является равнобедренным.

4) Если высота треугольника совпадает с его биссектрисой, то треугольник является равнобедренным.

5) Если накрест лежащие углы, образовавшиеся при пересечении двух прямых секущей, равны, то прямые параллельны.

6) Если сумма односторонних углов, образовавшихся при пересечении двух прямых секущей, равна $180°$, то прямые параллельны.

7) Если соответственные углы, образовавшиеся при пересечении двух прямых секущей, равны, то прямые параллельны.

8) Катет, лежащий против угла треугольника, равного $30°$, равен половине гипотенузы.

9) Если прямая является касательной к окружности, то она перпендикулярна радиусу, проведённому в точку касания.

10) Если расстояние от центра окружности до некоторой прямой равно радиусу окружности, то эта прямая является касательной к данной окружности.

11) Если треугольник равносторонний, то центры его вписанной и описанной окружностей совпадают.

12) Если хорды одной окружности равноудалены от её центра, то они равны.

13) Если биссектриса внешнего угла треугольника параллельна его стороне, то треугольник является равнобедренным.

14) Если две высоты треугольника равны, то треугольник является равнобедренным.

15) Если в четырёхугольнике две противолежащие стороны равны и параллельны, то этот четырёхугольник — параллелограмм.

§ 5 Прямоугольник. Ромб. Квадрат

Параллелограмм — это четырёхугольник, однако очевидно, что не каждый четырёхугольник является параллелограммом. В этом случае говорят, что параллелограмм — это отдельный вид четырёхугольника. Рисунок 5.1 иллюстрирует этот факт.

Существуют также отдельные виды параллелограммов.

Определение

Прямоугольником называют параллелограмм, у которого все углы прямые.

На рисунке 5.2 изображён прямоугольник $ABCD$.

Рис. 5.1

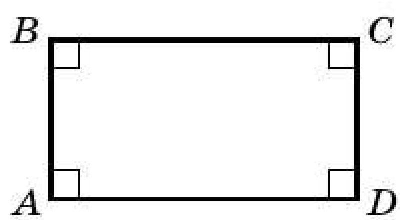


Рис. 5.2

Из определения следует, что прямоугольник обладает всеми свойствами параллелограмма. *В прямоугольнике:*

- *противолежащие стороны равны;*
- *диагонали точкой пересечения делятся пополам.*

Однако прямоугольник имеет свои особые свойства, которыми не обладает параллелограмм, отличный от прямоугольника. Так, из определения следует, что *все углы прямоугольника равны*. Ещё одно свойство прямоугольника выражает следующая теорема.

Теорема 5.1

Диагонали прямоугольника равны.

Доказательство

На рисунке 5.3 изображён прямоугольник $ABCD$. Докажем, что его диагонали AC и BD равны.

В прямоугольных треугольниках ABD и DCA катеты AB и DC равны, а катет AD общий. Поэтому треугольники ABD и DCA равны по двум катетам. Отсюда $BD = AC$. ■

Определение прямоугольника позволяет среди параллелограммов распознавать прямоугольники. Этой же цели служат следующие две теоремы, которые называют признаками прямоугольника.

Теорема 5.2

Если один из углов параллелограмма прямой, то этот параллелограмм — прямоугольник.

Докажите эту теорему самостоятельно.

Теорема 5.3

Если диагонали параллелограмма равны, то этот параллелограмм — прямоугольник.

Доказательство

На рисунке 5.4 изображён параллелограмм $ABCD$, диагонали AC и BD которого равны. Докажем, что параллелограмм $ABCD$ — прямоугольник.

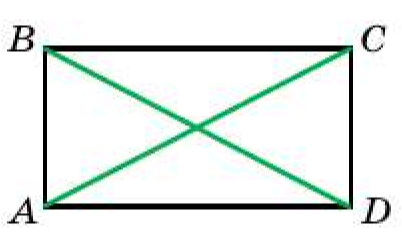


Рис. 5.3

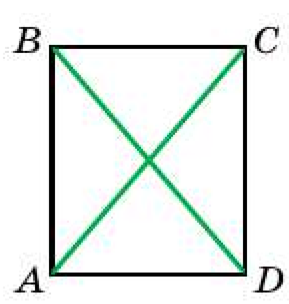


Рис. 5.4

Рассмотрим треугольники ABD и DCA. У них $AB = CD$, $BD = AC$, отрезок AD — общая сторона. Следовательно, эти треугольники равны по третьему признаку равенства треугольников. Отсюда $\angle BAD = \angle CDA$. Эти углы являются односторонними при параллельных прямых AB и

DC и секущей AD. Таким образом, $\angle BAD + \angle CDA = 180°$. Тогда $\angle BAD = \angle CDA = 90°$. Поэтому по теореме 5.2 параллелограмм $ABCD$ — прямоугольник. ■

Задача 1. Из точки M гипотенузы AB прямоугольного треугольника ABC опущены перпендикуляры ME и MF на катеты (рис. 5.5). Укажите положение точки M на гипотенузе, при котором длина отрезка EF будет наименьшей.

Решение. Очевидно, что четырёхугольник $FMEC$ — прямоугольник. Тогда $EF = MC$. Следовательно, задача свелась к нахождению положения точки M на гипотенузе AB, при котором длина отрезка CM будет наименьшей. Такому положению соответствует основание высоты треугольника ABC, проведённой из вершины C. ■

Задача 2. Докажите, что сумма расстояний от произвольной точки основания равнобедренного треугольника до его боковых сторон постоянна и равна высоте треугольника, проведённой к боковой стороне.

Решение. Пусть M — произвольная точка основания AC равнобедренного треугольника ABC. Проведём $MF \perp AB$, $ME \perp BC$, $CK \perp AB$ (рис. 5.6). Докажем, что $ME + MF = CK$.

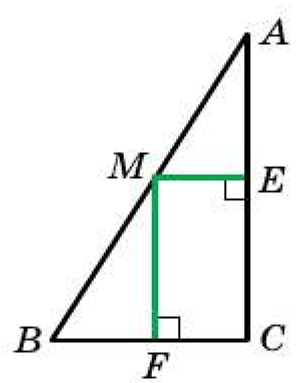


Рис. 5.5

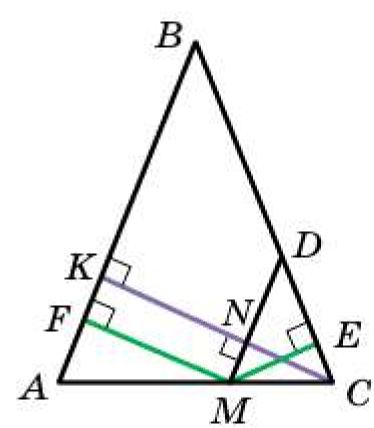


Рис. 5.6

Проведём $MD \parallel AB$. Поскольку $\angle DMC = \angle BAC = \angle BCA$, то треугольник MDC равнобедренный. Пусть N — точка пересечения отрезков CK и MD. Поскольку $CK \perp AB$ и $MD \parallel AB$, то отрезок CN — высота треугольника MDC. Отрезки CN и ME равны как высоты равнобедренного треугольника, проведённые к боковым сторонам. Очевидно, что четырёхугольник $MFKN$ — прямоугольник. Отсюда $MF = KN$.

Имеем: $MF + ME = KN + CN = CK$. ■

В § 25 вы ознакомитесь с методом, позволяющим решить эту задачу другим способом.

Определение

Ромбом называют параллелограмм, у которого все стороны равны.

На рисунке 5.7 изображён ромб $ABCD$.

Из определения следует, что ромб обладает всеми свойствами параллелограмма. *В ромбе:*

- *противолежащие углы равны;*
- *диагонали точкой пересечения делятся пополам.*

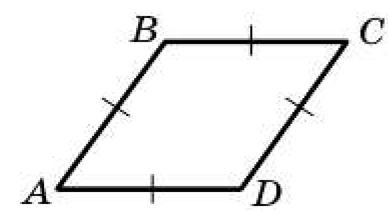


Рис. **5.7**

Однако ромб обладает и своими особыми свойствами.

Теорема 5.4

Диагонали ромба перпендикулярны и являются биссектрисами его углов.

Доказательство

На рисунке 5.8 изображён ромб $ABCD$, диагонали которого пересекаются в точке O. Докажем, что $BD \perp AC$ и $\angle ABO = \angle CBO$.

Поскольку по определению ромба все его стороны равны, то треугольник ABC равнобедренный ($AB = BC$). По свойству диагоналей параллелограмма $AO = OC$. Тогда отрезок BO является медианой треугольника ABC, а значит, и высотой, и биссектрисой этого треугольника. Следовательно, $BD \perp AC$ и $\angle ABO = \angle CBO$. ■

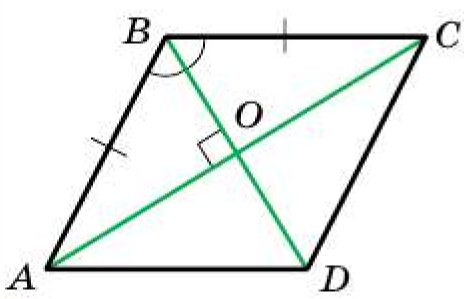


Рис. **5.8**

Распознавать ромбы среди параллелограммов позволяют не только определение ромба, но и следующие две теоремы, которые называют признаками ромба.

Теорема 5.5

Если диагонали параллелограмма перпендикулярны, то этот параллелограмм — ромб.

Теорема 5.6

Если диагональ параллелограмма является биссектрисой его угла, то этот параллелограмм — ромб.

Докажите эти теоремы самостоятельно.

Задача 3. В ромбе $ABCD$ отметили точку M так, что треугольник BCM — равносторонний (рис. 5.9). Биссектриса угла ABM пересекает диагональ AC в точке F. Докажите, что точки F, M и D лежат на одной прямой.

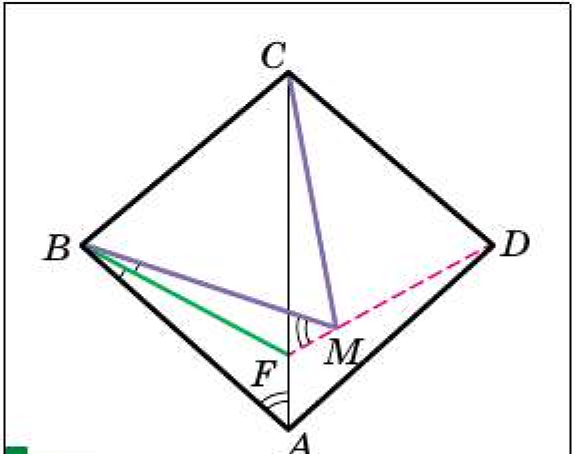


Рис. 5.9

Решение. Пусть $\angle BAC = \alpha$. Имеем: $AB = BC = BM$, $\angle ABF = \angle MBF$. Следовательно, треугольники ABF и MBF равны по двум сторонам и углу между ними. Отсюда $\angle FMB = \alpha$.

Имеем: $\angle BAD = \angle BCD = 2\angle BAC = 2\alpha$. Тогда $\angle MCD = 2\alpha - 60°$. Поскольку $CM = BC$ и $BC = CD$, то $CM = CD$ и треугольник MCD равнобедренный. Отсюда $\angle CMD = \frac{1}{2}(180° - (2\alpha - 60°)) = 120° - \alpha$. Имеем: $\angle FMD = \angle FMB + \angle BMC + \angle CMD = \alpha + 60° + 120° - \alpha = 180°$. Следовательно, угол FMD — развёрнутый, т. е. точки F, M и D лежат на одной прямой. ■

Определение

Квадратом называют прямоугольник, у которого все стороны равны.

На рисунке 5.10 изображён квадрат $ABCD$.

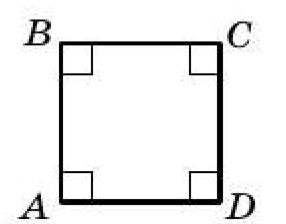


Рис. 5.10

Из определения следует, что квадрат — это ромб, у которого все углы равны. Значит, квадрат является отдельным видом и прямоугольника, и ромба. Это иллюстрирует рисунок 5.11. Поэтому квадрат обладает всеми свойствами прямоугольника и ромба. Отсюда следует, что:

- *все углы квадрата прямые*;
- *диагонали квадрата равны, перпендикулярны и являются биссектрисами его углов.*

Задача 4. На стороне BC квадрата $ABCD$ во внешнюю сторону построен равнобедренный треугольник BMC с основанием BC так, что $\angle MAD = 75°$ (рис. 5.12). Найдите угол BMC.

Решение. Имеем: $\angle MBC = \angle MCB$. Тогда $\angle MBA = \angle MCD$. Следовательно, треугольники ABM и DCM равны по первому признаку равенства треугольников. Отсюда $MA = MD$, а следовательно, $\angle MDA = 75°$.

Построим на стороне BC квадрата $ABCD$ во внешнюю сторону равносторонний треугольник BFC (рис. 5.13). Имеем: $\angle ABF = 90° + 60° = 150°$. Поскольку $AB = BF$, то $\angle BAF = \angle BFA = 15°$. Отсюда $\angle FAD = 75°$. Аналогично можно доказать, что $\angle FDA = 75°$.

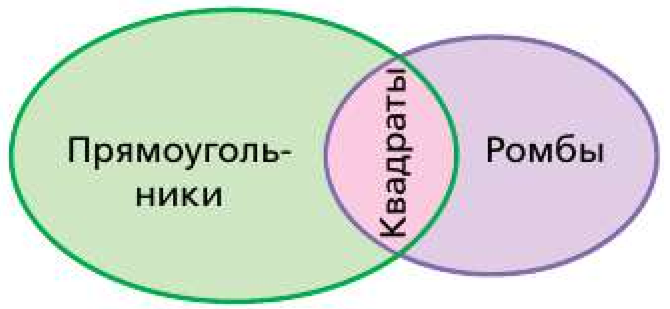


Рис. 5.11

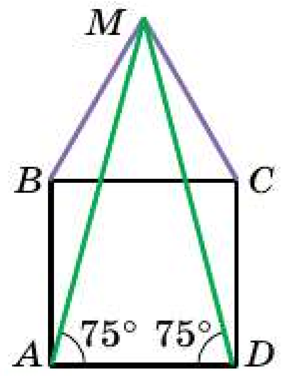


Рис. 5.12

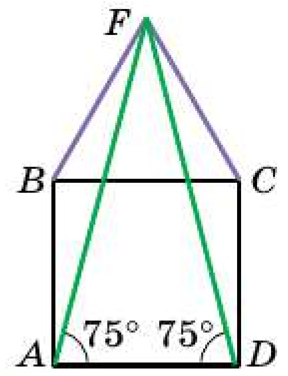


Рис. 5.13

В заданной полуплоскости относительно прямой AD существует лишь один равнобедренный треугольник с основанием AD и углами при основании, равными $75°$. Следовательно, точки F и M совпадают и $\angle BMC = 60°$.

Ответ: $60°$. ■

1. Какую фигуру называют прямоугольником?
2. Какими свойствами обладает прямоугольник?
3. По каким признакам можно установить, что параллелограмм является прямоугольником?
4. Какую фигуру называют ромбом?
5. Какими свойствами обладает ромб?
6. По каким признакам можно установить, что параллелограмм является ромбом?
7. Какую фигуру называют квадратом?
8. Какой ромб является квадратом?
9. Какими свойствами обладает квадрат?

Упражнения

5.1. Диагонали прямоугольника $ABCD$ (рис. 5.14) пересекаются в точке O, $\angle ADB = 30°$, $BD = 10$ см. Найдите периметр треугольника AOB.

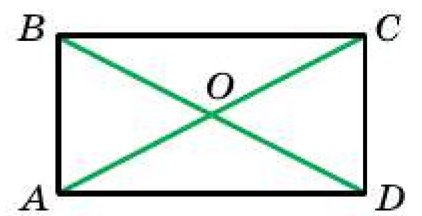


Рис. 5.14

5.2. Угол между диагоналями прямоугольника равен $60°$, а меньшая сторона прямоугольника равна 8 см. Найдите диагональ прямоугольника.

5.3. Точка M — середина стороны BC прямоугольника $ABCD$, $MA \perp MD$, периметр прямоугольника равен 36 см. Найдите стороны прямоугольника.

5.4. Гипотенуза равнобедренного прямоугольного треугольника равна 55 см. Прямоугольник $ABCD$ построен так, что две его вершины A и D принадлежат гипотенузе, а две другие — катетам данного треугольника. Найдите стороны прямоугольника, если $AB : BC = 3 : 5$.

5.5. В треугольнике ABC $\angle C = 90°$, $AC = BC = 6$ см. Прямоугольник $CMKN$ построен так, что точка M принадлежит катету AC, точка N — катету BC, а точка K — гипотенузе AB. Найдите периметр прямоугольника $CMKN$.

5.6. Докажите, что если диагонали параллелограмма образуют равные углы с одной из его сторон, то этот параллелограмм является прямоугольником.

5.7. Постройте прямоугольник по диагонали и углу между диагональю и стороной.

5.8. Постройте прямоугольник по диагонали и углу между диагоналями.

5.9. Постройте прямоугольник по стороне и углу между диагоналями, противолежащему данной стороне.

5.10. Одна из диагоналей ромба равна его стороне. Найдите углы ромба.

5.11. Найдите углы ромба, если его периметр равен 24 см, а высота — 3 см.

5.12. Найдите периметр ромба $ABCD$, если $\angle A = 60°$, $BD = 9$ см.

5.13. Точки M и K — соответственно середины сторон AB и BC ромба $ABCD$. Докажите, что $MD = KD$.

5.14. На сторонах AB и AD ромба $ABCD$ отложены равные отрезки AE и AF соответственно. Докажите, что $\angle CEF = \angle CFE$.

5.15. Докажите, что высоты ромба равны.

5.16. Высота ромба, проведённая из вершины его тупого угла, делит сторону ромба пополам. Меньшая диагональ ромба равна 4 см. Найдите углы и периметр ромба.

5.17. Докажите, что диагональ ромба делит пополам угол между высотами ромба, проведёнными из той же вершины, что и диагональ.

5.18. Отрезок AM — биссектриса треугольника ABC. Через точку M проведены прямая, которая параллельна стороне AC и пересекает сторону AB в точке K, и прямая, которая параллельна стороне AB и пересекает сторону AC в точке D. Докажите, что $AM \perp DK$.

5.19. Биссектрисы углов A и B параллелограмма $ABCD$ пересекают его стороны BC и AD в точках F и E соответственно. Определите вид четырёхугольника $ABFE$.

5.20. В треугольнике ABC проведён серединный перпендикуляр его биссектрисы BD, который пересекает стороны AB и BC в точках K и P соответственно. Определите вид четырёхугольника $BKDP$.

5.21. Постройте ромб по высоте и углу.

5.22. Постройте ромб по высоте и диагонали.

5.23. Постройте ромб по диагонали и углу, вершина которого принадлежит этой диагонали.

5.24. Постройте ромб по диагонали и противолежащему ей углу ромба.

5.25. На стороне BC квадрата $ABCD$ (рис. 5.15) отметили точку K так, что $\angle AKB = 74°$. Найдите угол CAK.

5.26. На стороне BC квадрата $ABCD$ отметили точку K так, что $AK = 2BK$. Найдите угол KAD.

5.27. Через вершины квадрата проведены прямые, параллельные его диагоналям. Докажите, что точки пересечения этих прямых являются вершинами квадрата.

5.28. В прямоугольном треугольнике через точку пересечения биссектрисы прямого угла и гипотенузы проведены прямые, параллельные катетам. Докажите, что образовавшийся четырёхугольник является квадратом.

5.29. Точки M, K, N и P являются соответственно серединами сторон AB, BC, CD и AD квадрата $ABCD$. Докажите, что четырёхугольник $MKNP$ — квадрат.

5.30. В треугольнике ABC $\angle C = 90°$, $AC = BC = 14$ см. Две стороны квадрата $CDEF$ лежат на катетах треугольника ABC, а вершина E принадлежит гипотенузе AB. Найдите периметр квадрата $CDEF$.

5.31. В квадрате $ABCD$ отметили точку M так, что треугольник AMB равносторонний. Докажите, что треугольник CMD равнобедренный.

5.32. Докажите, что если диагонали параллелограмма равны и перпендикулярны, то этот параллелограмм является квадратом.

5.33. Четырёхугольники $ABCD$, $DEFM$, $MNKL$, $LPOS$ и $SQTV$ — квадраты (рис. 5.16). Найдите сумму длин сторон квадратов, которые не лежат на прямой AV, если длина отрезка AV равна 16 см.

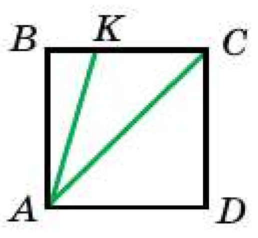


Рис. 5.15

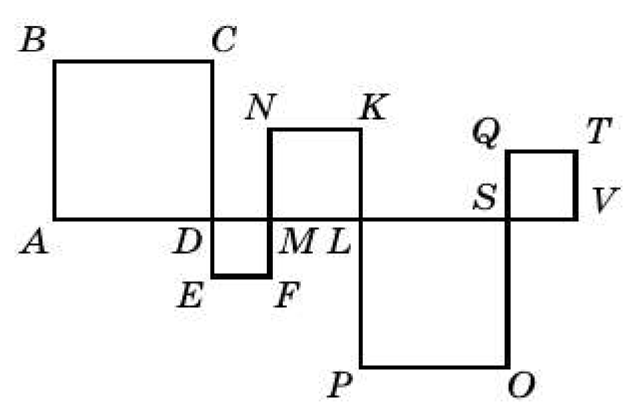


Рис. 5.16

5.34. Докажите, что медиана прямоугольного треугольника, проведённая к гипотенузе, равна её половине.

5.35. Докажите, что точки пересечения биссектрис углов параллелограмма, не являющегося ромбом, являются вершинами прямоугольника.

5.36. В прямоугольнике $ABCD$ $AD = 9$ см, $\angle BDA = 30°$. На сторонах BC и AD отметили соответственно точки M и K так, что образовался ромб $AMCK$. Найдите сторону этого ромба.

5.37. В прямоугольнике $ABCD$ $\angle BCA : \angle DCA = 1 : 5$, $AC = 18$ см. Найдите расстояние от точки C до диагонали BD.

5.38. Докажите, что точки пересечения биссектрис углов прямоугольника, не являющегося квадратом, являются вершинами квадрата.

5.39. Вершины M и K равностороннего треугольника AMK принадлежат сторонам BC и CD квадрата $ABCD$. Докажите, что $MK \parallel BD$.

5.40. Даны точки M и K. Постройте квадрат $ABCD$ так, чтобы точка M была серединой стороны AB, а точка K — серединой стороны BC.

5.41. В прямоугольнике $ABCD$ $AD = 2AB$. На стороне BC отметили точку M так, что $\angle AMB = \angle AMD$. Найдите эти углы.

5.42. Даны точки A, B и M. Постройте ромб $ABCD$, если известно расстояние от точки M до точки K — середины стороны CD.

5.43. На сторонах AB и BC параллелограмма $ABCD$ во внешнюю сторону построены квадраты $APQB$ и $BMNC$. Докажите, что отрезки DP и DN равны и перпендикулярны.

5.44. Серединный перпендикуляр диагонали AC прямоугольника $ABCD$ пересекает сторону BC в точке M так, что $BM : MC = 1 : 2$. Найдите углы, на которые диагональ прямоугольника делит его угол.

5.45. Серединный перпендикуляр диагонали AC прямоугольника $ABCD$ пересекает сторону BC и образует с ней угол, равный углу между диагоналями. Найдите этот угол.

5.46. Постройте прямоугольник:

1) по диагонали и разности двух сторон;
2) по периметру и диагонали;
3) по периметру и углу между диагоналями.

5.47. Постройте ромб:

1) по острому углу и разности диагоналей;
2) по острому углу и сумме стороны и высоты.

5.48. Через произвольную точку, принадлежащую квадрату, проведены две перпендикулярные прямые, каждая из которых пересекает две противолежащие стороны квадрата. Докажите, что отрезки этих прямых, принадлежащие квадрату, равны.

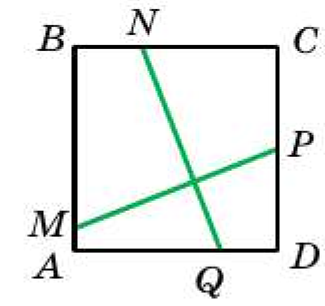


Рис. **5.17**

5.49. На сторонах квадрата $ABCD$ отмечены точки M, N, P и Q так, что $MP = NQ$ (рис. 5.17). Докажите, что $MP \perp NQ$.

5.50. Постройте квадрат:
1) по сумме диагонали и стороны;
2) по разности диагонали и стороны.

5.51. В квадрате $ABCD$ выбрана точка M так, что треугольник AMD равносторонний. Вне квадрата выбрана точка K так, что треугольник AKB равносторонний. Докажите, что точки K, M и C лежат на одной прямой.

5.52. В параллелограмме $ABCD$ $\angle ABD = 3\angle DBC$, $BC = 2AB$. Найдите углы параллелограмма.

5.53. Точки M и N — соответственно середины сторон BC и CD прямоугольника $ABCD$. Отрезки BN и DM пересекаются в точке P. Докажите, что $\angle MAN = \angle BPM$.

5.54. Дан параллелограмм $ABCD$. Биссектрисы углов BAC и BDC пересекаются в точке M так, что $\angle AMD = 45°$. Докажите, что четырёхугольник $ABCD$ — ромб.

5.55. Даны точки A, C и M. Постройте ромб $ABCD$, если известно расстояние от точки M до точки N — середины стороны BC.

5.56. В квадрате $ABCD$ отметили точку O так, что $\angle OAD = \angle ODA = 15°$. Докажите, что треугольник BOC равносторонний.

5.57. В прямоугольнике $ABCD$ $AD = 3AB$. На стороне AD отметили точку N так, что $AN = 2ND$. Докажите, что $\angle ANB + \angle ADB = 45°$.

5.58. На стороне AB и диагонали AC квадрата $ABCD$ отметили соответственно точки P и Q так, что $AP : PB = 3 : 2$, $AQ : QC = 4 : 1$. Найдите углы треугольника PQD.

§ 6 Средняя линия треугольника

Определение

Средней линией треугольника называют отрезок, соединяющий середины двух его сторон.

На рисунке 6.1 отрезки MN, NE и EM — средние линии треугольника ABC.

Теорема 6.1

Средняя линия треугольника, соединяющая середины двух его сторон, параллельна третьей стороне и равна её половине.

Доказательство

Пусть MN — средняя линия треугольника ABC (рис. 6.2). Докажем, что $MN \parallel AC$ и $MN = \frac{1}{2}AC$.

На прямой MN отметим точку E так, что $MN = NE$ (рис. 6.2). Соединим отрезком точки E и C. Поскольку точка N является серединой отрезка BC, то $BN = NC$. Углы 1 и 2 равны как вертикальные. Следовательно, треугольники MBN и ECN равны по первому признаку равенства треугольников. Отсюда $MB = EC$ и $\angle 3 = \angle 4$. Учитывая, что $AM = BM$, получим: $EC = AM$. Углы 3 и 4 являются накрест лежащими при прямых AB и EC и секущей BC. Тогда $AB \parallel EC$.

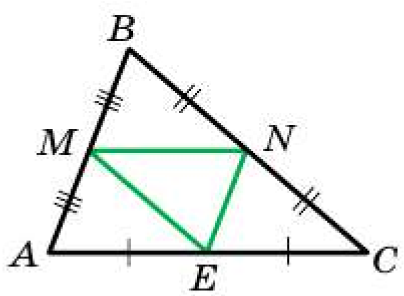


Рис. 6.1

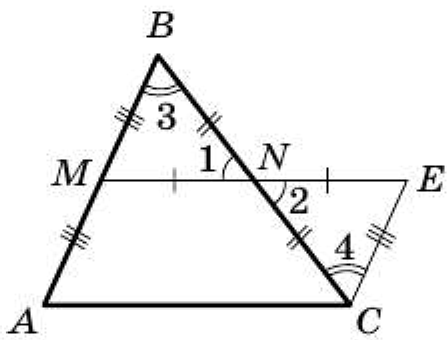


Рис. 6.2

Таким образом, в четырёхугольнике $AMEC$ стороны AM и EC параллельны и равны. Следовательно, по теореме 3.2 четырёхугольник $AMEC$ является параллелограммом. Отсюда $ME \parallel AC$, т. е. $MN \parallel AC$.

Также $ME = AC$. Поскольку $MN = \frac{1}{2}ME$, то $MN = \frac{1}{2}AC$. ■

Задача 1. Докажите, что середины сторон четырёхугольника являются вершинами параллелограмма.

Решение. В четырёхугольнике $ABCD$ точки M, N, K и P — середины сторон AB, BC, CD и AD соответственно (рис. 6.3).

Отрезок MN — средняя линия треугольника ABC. По свойству средней линии треугольника $MN \parallel AC$ и $MN = \frac{1}{2}AC$.

Отрезок PK — средняя линия треугольника ADC. По свойству средней линии треугольника $PK \parallel AC$, $PK = \frac{1}{2}AC$.

Поскольку $MN \parallel AC$ и $PK \parallel AC$, то $MN \parallel PK$.

Из равенств $MN = \frac{1}{2}AC$ и $PK = \frac{1}{2}AC$ получаем: $MN = PK = \frac{1}{2}AC$.

Следовательно, в четырёхугольнике $MNKP$ стороны MN и PK равны и параллельны, поэтому четырёхугольник $MNKP$ — параллелограмм. ■

Задача 2. В четырёхугольнике $ABCD$ $\angle ACD = \angle ABD = 90°$. Точки M и N — середины диагоналей AC и BD соответственно. Докажите, что прямая, которая перпендикулярна отрезку MN и проходит через точку пересечения диагоналей, пересекает сторону BC в её середине.

Решение. Пусть точка K — середина стороны BC. Тогда отрезки MK и NK — средние линии треугольников ABC и DBC соответственно (рис. 6.4). Имеем: $KM \parallel AB$, $AB \perp BD$, тогда $KM \perp BD$. Аналогично получаем, что $KN \perp AC$. Следовательно, точка O — точка пересечения диагоналей AC и BD — является ортоцентром треугольника MKN. Отсюда $KO \perp MN$. Поскольку через точку O можно провести единственную прямую, перпендикулярную отрезку MN, то утверждение задачи доказано. ■

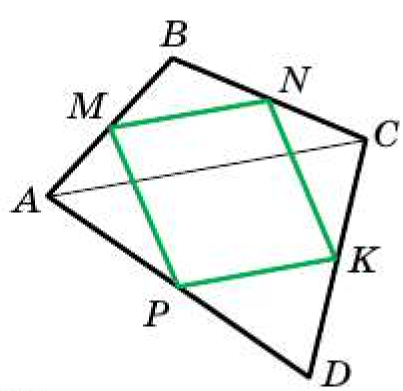


Рис. 6.3

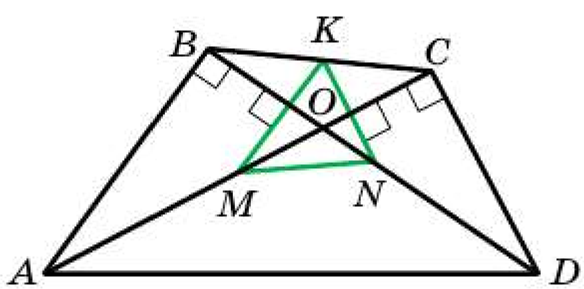


Рис. 6.4

1. Что называют средней линией треугольника?
2. Сколько средних линий можно провести в треугольнике?
3. Какими свойствами обладает средняя линия треугольника?

Упражнения

6.1. Докажите, что средние линии треугольника разбивают его на четыре равных треугольника.

6.2. Точки E и F — соответственно середины сторон AB и BC треугольника ABC. Найдите сторону AC, если она на 7 см больше отрезка EF.

6.3. Докажите, что средняя линия DE треугольника ABC (точки D и E принадлежат сторонам AB и BC соответственно) и его медиана BM точкой пересечения делятся пополам.

6.4. Найдите углы треугольника, две средние линии которого равны и перпендикулярны.

6.5. Средняя линия равнобедренного треугольника, параллельная основанию, равна 6 см. Найдите стороны данного треугольника, если его периметр равен 46 см.

6.6. Докажите, что отрезки, соединяющие середины противолежащих сторон четырёхугольника, точкой пересечения делятся пополам.

6.7. Сумма диагоналей четырёхугольника равна 28 см. Найдите периметр четырёхугольника, вершины которого являются серединами сторон данного четырёхугольника.

6.8. Вершинами четырёхугольника являются середины сторон ромба с диагоналями 8 см и 14 см. Определите вид четырёхугольника и найдите его стороны.

6.9. Вершинами четырёхугольника являются середины сторон прямоугольника с диагональю 12 см. Определите вид четырёхугольника и найдите его стороны.

6.10. Докажите, что вершины треугольника равноудалены от прямой, на которой лежит его средняя линия.

◆ ◆

6.11. Докажите, что середины всех отрезков, соединяющих данную точку с точками данной прямой, лежат на одной прямой.

6.12. Отрезки, соединяющие середины противолежащих сторон выпуклого четырёхугольника, равны. Докажите, что диагонали этого четырёхугольника перпендикулярны.

6.13. Диагонали выпуклого четырёхугольника равны. Докажите, что отрезки, соединяющие середины его противолежащих сторон, перпендикулярны.

6.14. На сторонах AB и BC треугольника отметили соответственно точки M и K так, что $AM = 3BM$, $CK = 3BK$. Докажите, что $MK \parallel AC$, и найдите отрезок MK, если $AC = 16$ см.

6.15. Углы BAD и BCE — внешние углы треугольника ABC. Из вершины B проведены перпендикуляры BM и BK к биссектрисам углов BAD и BCE соответственно. Найдите отрезок MK, если периметр треугольника ABC равен 18 см.

6.16. Постройте треугольник по серединам трёх его сторон.

6.17. Постройте параллелограмм по серединам трёх его сторон.

6.18. Докажите, что отрезки, соединяющие середины противолежащих сторон выпуклого четырёхугольника, и отрезок, соединяющий середины диагоналей, пересекаются в одной точке.

6.19. В четырёхугольнике $ABCD$ сумма углов, прилежащих к стороне AD, равна $90°$. Точки K и L — середины сторон BC и AD соответственно, точки M и N — середины диагоналей. Докажите, что $MN = KL$.

6.20. Угол ABC треугольника ABC равен $60°$. Медиана BM треугольника равна его высоте CH. Докажите, что треугольник ABC равносторонний.

6.21. Угол ABC треугольника ABC равен $30°$. Медиана CM треугольника равна его высоте, проведённой из вершины A. Найдите углы BAC и BCA.

6.22. Отрезки, соединяющие середины противолежащих сторон выпуклого четырёхугольника $ABCD$, делят его на четыре четырёхугольника с равными периметрами. Докажите, что четырёхугольник $ABCD$ — параллелограмм.

6.23. Даны треугольник ABC и точки D и E такие, что $\angle ADB = \angle BEC = 90°$ (рис. 6.5). Докажите, что длина отрезка DE не больше полупериметра треугольника ABC.

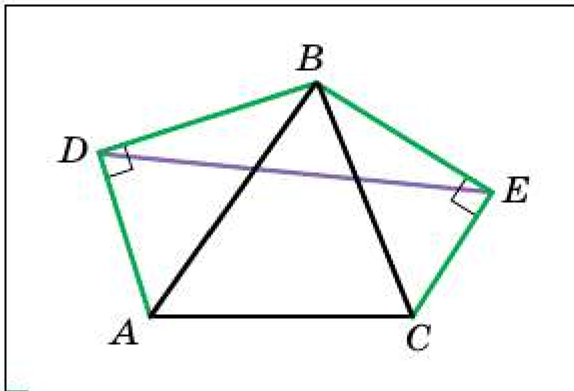


Рис. 6.5

6.24. Точки B_1 и C_1 — основания перпендикуляров, опущенных из вершины A треугольника ABC на биссектрисы углов B и C соответственно. Точки B_2 и C_2 — основания перпендикуляров, опущенных из вершины A на биссектрисы внешних углов при вершинах B и C соответственно. Докажите, что точки B_1, C_1, B_2 и C_2 лежат на одной прямой.

6.25. В прямоугольном треугольнике ABC ($\angle ACB = 90°$) проведена высота CD. Биссектрисы углов BAC и DCB пересекаются в точке M, а биссектрисы углов ABC и DCA — в точке N. Докажите, что $MN \parallel AB$.

6.26. Точки M и N — середины соответственно сторон AB и CD выпуклого четырёхугольника $ABCD$. Докажите, что если $MN = \frac{1}{2}(BC + AD)$, то $BC \parallel AD$.

6.27. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ $AD > BC$, точки M и N — середины диагоналей AC и BD соответственно, $MN = \frac{1}{2}(AD - BC)$. Докажите, что $AD \parallel BC$.

6.28. Дан равносторонний треугольник ABC. Описана дуга BC с центром в точке A и радиусом AB, точка M — произвольная точка дуги BC, отличная от точек B и C. Середины хорд MC и MB соединены отрезками с серединами сторон AB и AC соответственно. Докажите, что полученные отрезки перпендикулярны.

6.29. Продолжение медианы AM треугольника ABC пересекает его описанную окружность в точке D. Постройте треугольник ABC по заданным точкам A, B и D.

6.30. Диагонали выпуклого четырёхугольника $ABCD$ перпендикулярны. Через середины сторон AB и AD проведены прямые, перпендикулярные соответственно сторонам DC и BC. Докажите, что точка пересечения проведённых прямых принадлежит прямой AC.

6.31. Стороны AB и CD выпуклого четырёхугольника $ABCD$ равны. Через середины диагоналей AC и BD проведена прямая, которая пересекает стороны AB и CD в точках M и N соответственно. Докажите, что $\angle BMN = \angle CNM$.

6.32. В выпуклом четырёхугольнике прямая, проходящая через середины двух противолежащих сторон, образует равные углы с диагоналями четырёхугольника. Докажите, что диагонали равны.

6.33. В треугольнике ABC $AC > AB$, а угол при вершине A равен α. На стороне AC отметили точку M так, что $AB = MC$. Точка E — середина отрезка AM, точка D — середина отрезка BC. Найдите угол CED.

§ 7 Трапеция

Определение

Трапецией называют четырёхугольник, у которого две стороны параллельны, а две другие не параллельны.

Каждый из четырёхугольников, изображённых на рисунке 7.1, является трапецией.

Параллельные стороны трапеции называют **основаниями**, а непараллельные — **боковыми сторонами** (рис. 7.2).

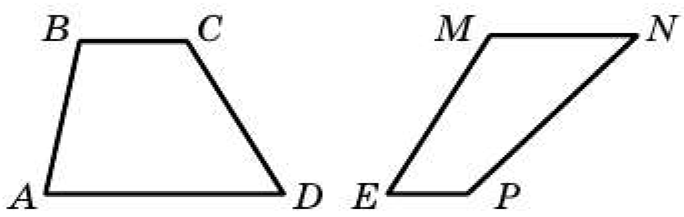


Рис. 7.1

Рис. 7.2

В трапеции $ABCD$ ($BC \parallel AD$) углы A и D называют **углами при основании** AD, а углы B и C — углами при основании BC.

Определение

Высотой трапеции называют перпендикуляр, опущенный из любой точки прямой, содержащей одно из оснований, на прямую, содержащую другое основание.

На рисунке 7.3 каждый из отрезков BM, EF, DK и PQ является высотой трапеции $ABCD$. Длины этих отрезков равны расстоянию между параллельными прямыми BC и AD. Поэтому $BM = EF = DK = PQ$.

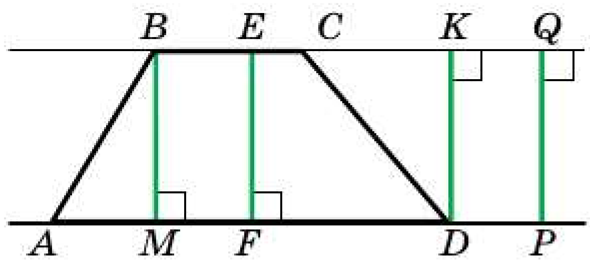


Рис. 7.3

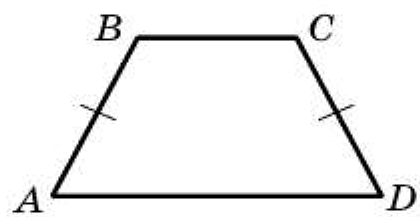


Рис. 7.4

На рисунке 7.4 изображена трапеция $ABCD$, у которой боковые стороны AB и CD равны. Такую трапецию называют **равнобокой** или **равнобедренной**.

Если боковая сторона трапеции является её высотой, то такую трапецию называют **прямоугольной** (рис. 7.5).

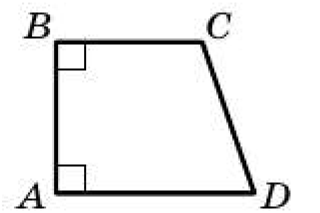


Рис. 7.5

Трапеция — это отдельный вид четырёхугольника. Связь между четырёхугольниками и их отдельными видами показана на рисунке 7.6.

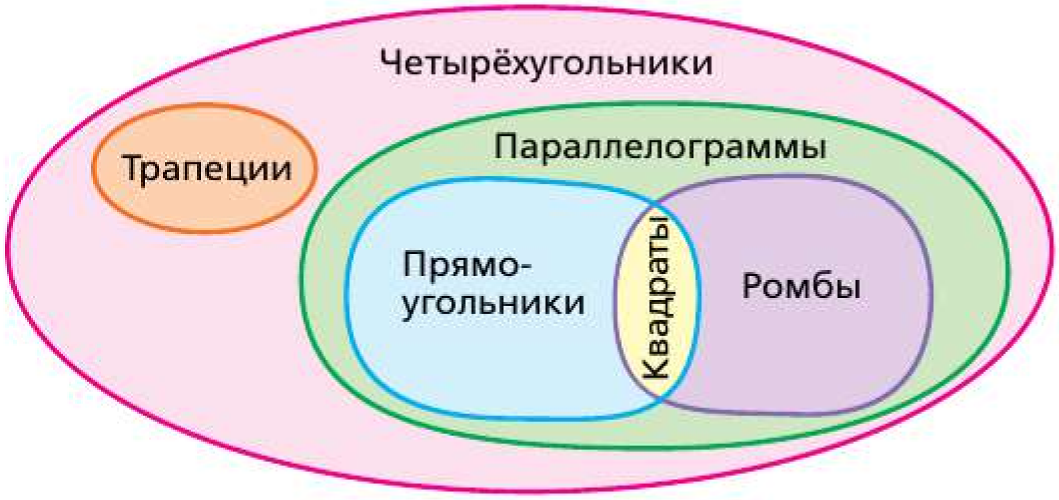


Рис. **7.6**

Определение

Средней линией трапеции называют отрезок, соединяющий середины её боковых сторон.

На рисунке 7.7 отрезок MN — средняя линия трапеции $ABCD$.

Теорема 7.1

Средняя линия трапеции параллельна основаниям и равна их полусумме.

Доказательство

Пусть отрезок MN — средняя линия трапеции $ABCD$ (рис. 7.8). Докажем, что $MN \parallel AD$ и $MN = \frac{1}{2}(AD + BC)$.

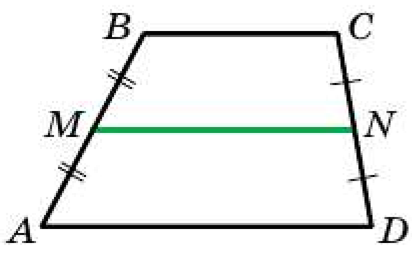


Рис. **7.7**

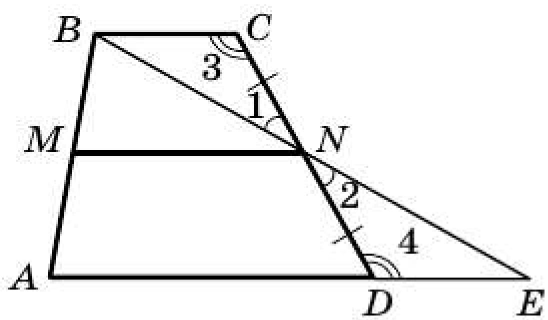


Рис. **7.8**

Проведём прямую BN и точку её пересечения с прямой AD обозначим буквой E.

Поскольку точка N — середина отрезка CD, то $CN = ND$. Углы 1 и 2 равны как вертикальные, а углы 3 и 4 равны как накрест лежащие при параллельных прямых BC и AE и секущей CD. Следовательно, треугольники BCN и EDN равны по второму признаку равенства треугольников. Отсюда $BC = DE$ и $BN = NE$. Тогда отрезок MN — средняя линия треугольника ABE. Из этого следует, что $MN \parallel AE$, т. е. $MN \parallel AD$, и $MN = \frac{1}{2}AE$. Имеем:

$$MN = \frac{1}{2}AE = \frac{1}{2}(AD + DE) = \frac{1}{2}(AD + BC). \blacksquare$$

Задача 1 (свойства равнобокой трапеции). Докажите, что в равнобокой трапеции:

1) углы при каждом основании равны;

2) диагонали равны;

3) высота трапеции, проведённая из вершины тупого угла, делит основание трапеции на два отрезка, меньший из которых равен половине разности оснований, а больший — полусумме оснований (средней линии трапеции).

Решение. Рассмотрим равнобокую трапецию $ABCD$ ($AB = CD$).

1) Проведём высоты BM и CK (рис. 7.9). Поскольку $AB = CD$ и $BM = CK$, то прямоугольные треугольники AMB и DKC равны по катету и гипотенузе. Тогда $\angle A = \angle D$.

Имеем: $\angle A = \angle D$, $\angle A + \angle ABC = 180°$, $\angle D + \angle DCB = 180°$. Следовательно, $\angle ABC = \angle DCB$.

2) Рассмотрим треугольники ACD и DBA (рис. 7.10).

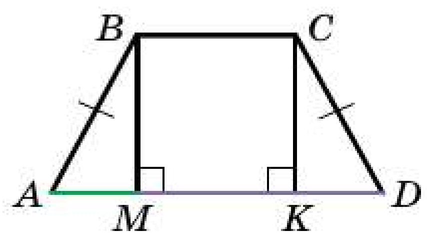


Рис. 7.9

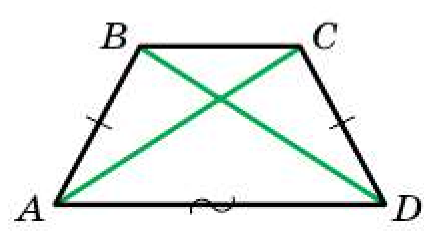


Рис. 7.10

Имеем: $AB = CD$, отрезок AD — общая сторона, углы BAD и CDA равны как углы при основании равнобокой трапеции. Следовательно, треугольники ACD и DBA равны по двум сторонам и углу между ними. Тогда $AC = BD$.

3) В четырёхугольнике $BMKC$ (рис. 7.9) $BM \parallel CK$, $BC \parallel MK$, угол BMK прямой. Следовательно, этот четырёхугольник является прямоугольником. Отсюда $MK = BC$.

Из равенства треугольников AMB и DKC следует, что $AM = KD$. Тогда

$$AM = \frac{AD - MK}{2} = \frac{AD - BC}{2};$$

$$MD = AD - AM = AD - \frac{AD - BC}{2} = \frac{2AD - AD + BC}{2} = \frac{AD + BC}{2}. \blacksquare$$

Задача 2. В трапеции $ABCD$ диагонали перпендикулярны, а диагональ AC равна средней линии трапеции. Найдите углы, которые диагонали трапеции образуют с основаниями.

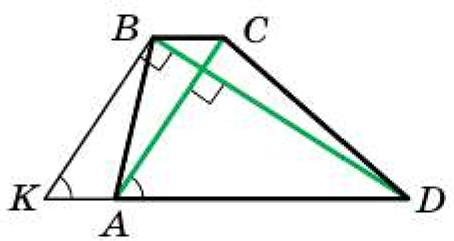


Рис. 7.11

Решение. Через точку B проведём $BK \parallel AC$, точка K принадлежит прямой AD (рис. 7.11). Очевидно, что четырёхугольник $KBCA$ — параллелограмм. Тогда $KA = BC$ и в треугольнике KBD сторона KD равна удвоенной средней линии трапеции.

Поскольку $AC \perp BD$ и $KB \parallel AC$, то $\angle KBD = 90°$. В прямоугольном треугольнике KBD катет KB равен половине гипотенузы KD. Тогда $\angle BDK = 30°$, $\angle BKD = 60°$. Так как $KB \parallel AC$, то $\angle CAD = \angle BKD = 60°$.

Ответ: $30°$, $60°$. ■

1. Какой четырёхугольник называют трапецией?
2. Какие стороны трапеции называют основаниями? Боковыми сторонами?
3. Что называют высотой трапеции?
4. Какую трапецию называют равнобокой?
5. Какую трапецию называют прямоугольной?
6. Что называют средней линией трапеции?
7. Сформулируйте теорему о свойствах средней линии трапеции.
8. Сформулируйте свойства равнобокой трапеции.

Упражнения

7.1. Могут ли два противолежащих угла трапеции быть: 1) тупыми; 2) прямыми; 3) равными?

7.2. Докажите, что если углы при одном из оснований трапеции равны, то данная трапеция является равнобокой.

7.3. Докажите, что сумма противолежащих углов равнобокой трапеции равна 180°. Верно ли обратное утверждение: если сумма противолежащих углов трапеции равна 180°, то данная трапеция является равнобокой?

7.4. Средняя линия равностороннего треугольника со стороной 6 см разбивает его на треугольник и четырёхугольник. Определите вид четырёхугольника и найдите его периметр.

7.5. Высота равнобокой трапеции, проведённая из конца меньшего основания, делит большее основание на отрезки длиной 6 см и 10 см. Найдите основания трапеции.

7.6. Один из углов равнобокой трапеции равен 60°, боковая сторона — 18 см, а сумма оснований — 50 см. Найдите основания трапеции.

7.7. Основания прямоугольной трапеции равны 10 см и 24 см, а один из углов — 45°. Найдите меньшую боковую сторону трапеции.

7.8. Основания прямоугольной трапеции равны 7 см и 15 см, а один из углов — 60°. Найдите бóльшую боковую сторону трапеции.

7.9. В трапеции $ABCD$ $AB = CD$, $\angle BAC = 20°$, $\angle CAD = 50°$. Найдите углы ACB и ACD.

7.10. В трапеции $ABCD$ $BC \parallel AD$, $AB \perp AD$, $BC = CD$, $\angle ABD = 80°$. Найдите углы трапеции.

7.11. Одно из оснований трапеции на 8 см больше другого, а средняя линия равна 17 см. Найдите основания трапеции.

7.12. Основания трапеции относятся как 3 : 4, а средняя линия равна 14 см. Найдите основания трапеции.

7.13. Каждую из боковых сторон трапеции $ABCD$ (рис. 7.12) разделили на четыре равные части: $AE = EF = FK = KB$, $DN = NM = MP = PC$. Найдите отрезки EN, FM и KP, если $AD = 19$ см, $BC = 11$ см.

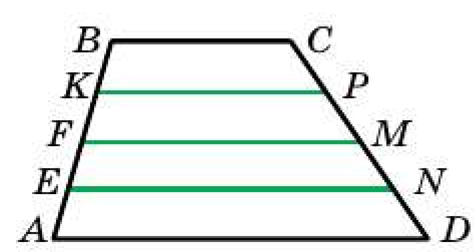


Рис. 7.12

7.14. Высота прямоугольной трапеции, проведённая из вершины тупого угла, делит большее основание на отрезки длиной 7 см и 5 см, считая от вершины прямого угла. Найдите среднюю линию трапеции.

7.15. Средняя линия прямоугольной трапеции равна 9 см, а высота, проведённая из вершины тупого угла, делит большее основание на отрезки, один из которых в 2 раза больше другого, считая от вершины прямого угла. Найдите основания трапеции.

7.16. Диагонали равнобокой трапеции $ABCD$ ($AB = CD$) пересекаются в точке O. Докажите, что $AO = OD$ и $BO = OC$.

7.17. Высота равнобокой трапеции равна h, а боковая сторона видна из точки пересечения диагоналей под углом[1] 60°. Найдите диагональ трапеции.

7.18. Основания равнобокой трапеции относятся как 2 : 5, а диагональ делит тупой угол трапеции пополам. Найдите стороны трапеции, если её периметр равен 68 см.

7.19. В трапеции $ABCD$ $AB = CD$, $AD = 24$ см, $\angle ADB = \angle CDB$, а периметр равен 60 см. Найдите неизвестные стороны трапеции.

7.20. Стороны трапеции равны a, a, a и $2a$. Найдите углы трапеции.

7.21. В трапеции $ABCD$ диагональ AC перпендикулярна боковой стороне CD и является биссектрисой угла BAD, $\angle D = 60°$, периметр трапеции равен 40 см. Найдите основания трапеции.

7.22. Диагональ равнобокой трапеции перпендикулярна боковой стороне, а меньшее основание равно боковой стороне. Найдите углы трапеции.

7.23. При каком условии высота равнобокой трапеции равна половине разности оснований?

7.24. Постройте прямоугольную трапецию по основаниям и меньшей боковой стороне.

7.25. Постройте равнобокую трапецию по основанию, боковой стороне и диагонали.

7.26. В трапеции $ABCD$ ($AD \parallel BC$) биссектриса угла ABC пересекает среднюю линию в точке P. Докажите, что $\angle APB = 90°$.

7.27. Докажите, что если диагонали равнобокой трапеции перпендикулярны, то её высота равна средней линии трапеции.

---

[1] Пусть даны отрезок AB и точка M, не лежащая на прямой AB, такая, что $\angle AMB = \alpha$. В таком случае говорят, что отрезок AB виден из точки M под углом α.

7.28. Докажите, что если высота равнобокой трапеции равна её средней линии, то диагонали трапеции перпендикулярны.

7.29. Диагональ прямоугольной трапеции разбивает её на два треугольника, один из которых является равносторонним со стороной a. Найдите среднюю линию трапеции.

7.30. Диагональ равнобокой трапеции разбивает её на два равнобедренных треугольника. Найдите углы трапеции.

7.31. В трапеции $ABCD$ ($BC \parallel AD$) $AC \perp BD$, $\angle CAD = 30°$, $BD = 8$ см. Найдите среднюю линию трапеции.

7.32. Докажите, что в трапеции разность боковых сторон меньше разности оснований.

7.33. Длина высоты AB прямоугольной трапеции $ABCD$ равна сумме длин оснований AD и BC. Докажите, что биссектриса угла ABC делит сторону CD пополам.

7.34. Средняя линия трапеции равна отрезку, соединяющему середины оснований. Докажите, что диагонали этой трапеции перпендикулярны.

7.35. Диагонали трапеции перпендикулярны. Докажите, что средняя линия трапеции равна отрезку, соединяющему середины оснований.

7.36. Постройте трапецию:

1) по основаниям и боковым сторонам;

2) по основанию, прилежащему к нему углу и боковым сторонам;

3) по разности оснований, боковым сторонам и одной из диагоналей.

7.37. Постройте трапецию:

1) по основаниям и диагоналям;

2) по боковым сторонам, средней линии и высоте;

3) по боковым сторонам, высоте и одной из диагоналей.

7.38. Сумма углов при большем основании трапеции равна 90°. Докажите, что отрезок, соединяющий середины оснований, равен половине их разности.

7.39. Длина средней линии трапеции равна 5 см, а длина отрезка, соединяющего середины оснований, — 3 см. Углы при большем основании равны 30° и 60°. Найдите основания трапеции.

7.40. В трапеции $ABCD$ ($AD \parallel BC$) $AB = BC = \frac{1}{2}AD$. Найдите угол ACD.

7.41. В трапеции $ABCD$ диагонали перпендикулярны. На большем основании AD отметили точку M так, что $BM = MD = 3$ см. Найдите среднюю линию трапеции.

7.42. В трапеции $ABCD$ диагональ AC равна сумме оснований BC и AD. Угол между диагоналями равен $60°$. Докажите, что трапеция $ABCD$ равнобокая.

7.43. Пусть M — внутренняя точка равностороннего треугольника ABC. Существует ли треугольник, стороны которого равны отрезкам MA, MB и MC, а вершины лежат на сторонах данного равностороннего треугольника?

7.44. Из точек C и D, принадлежащих биссектрисе угла AOB, на стороны угла опущены перпендикуляры CA и DB. Точка K — середина отрезка CD. Докажите, что $KA = KB$.

Сумма углов выпуклого n-угольника

Сумма углов выпуклого n-угольника равна $180°(n-2)$.

Сумма внешних углов выпуклого n-угольника

Сумма внешних углов выпуклого n-угольника, взятых по одному при каждой вершине, равна $360°$.

Параллелограмм

Параллелограммом называют четырёхугольник, у которого каждые две противолежащие стороны параллельны.

Свойства параллелограмма

- Противолежащие стороны параллелограмма равны.
- Противолежащие углы параллелограмма равны.
- Диагонали параллелограмма точкой пересечения делятся пополам.

Высота параллелограмма

Высотой параллелограмма называют перпендикуляр, опущенный из любой точки прямой, содержащей сторону параллелограмма, на прямую, содержащую противолежащую сторону.

Свойство прямых, содержащих высоты треугольника

Прямые, содержащие высоты треугольника, пересекаются в одной точке.

Ортоцентр треугольника

Ортоцентром треугольника называют точку пересечения прямых, содержащих высоты треугольника.

Признаки параллелограмма

- Если в четырёхугольнике каждые две противолежащие стороны равны, то этот четырёхугольник — параллелограмм.
- Если в четырёхугольнике две противолежащие стороны равны и параллельны, то этот четырёхугольник — параллелограмм.
- Если в четырёхугольнике диагонали точкой пересечения делятся пополам, то этот четырёхугольник — параллелограмм.

Прямоугольник

Прямоугольником называют параллелограмм, у которого все углы прямые.

Особое свойство прямоугольника

Диагонали прямоугольника равны.

Признаки прямоугольника

- Если один из углов параллелограмма прямой, то этот параллелограмм — прямоугольник.
- Если диагонали параллелограмма равны, то этот параллелограмм — прямоугольник.

Ромб

Ромбом называют параллелограмм, у которого все стороны равны.

Особое свойство ромба

Диагонали ромба перпендикулярны и являются биссектрисами его углов.

Признаки ромба

- Если диагонали параллелограмма перпендикулярны, то этот параллелограмм — ромб.
- Если диагональ параллелограмма является биссектрисой его угла, то этот параллелограмм — ромб.

Квадрат

Квадратом называют прямоугольник, у которого все стороны равны.

Средняя линия треугольника

Средней линией треугольника называют отрезок, соединяющий середины двух его сторон.

Свойство средней линии треугольника

Средняя линия треугольника, соединяющая середины двух его сторон, параллельна третьей стороне и равна её половине.

Трапеция

Трапецией называют четырёхугольник, у которого две стороны параллельны, а две другие не параллельны.

Высота трапеции

Высотой трапеции называют перпендикуляр, опущенный из любой точки прямой, содержащей одно из оснований, на прямую, содержащую другое основание.

Средняя линия трапеции

Средней линией трапеции называют отрезок, соединяющий середины боковых сторон трапеции.

Свойство средней линии трапеции

Средняя линия трапеции параллельна основаниям и равна их полусумме.

глава

2 Вписанные и описанные четырёхугольники

В этой главе вы ознакомитесь с центральным углом окружности и его свойствами. Узнаете, какие четырёхугольники называют вписанными и описанными. Ознакомитесь со свойствами и признаками этих четырёхугольников.

§ 8 Центральные и вписанные углы

Определение

Центральным углом окружности называют угол с вершиной в центре окружности.

На рисунке 8.1 угол AOB — центральный. Стороны этого угла пересекают окружность в точках A и B. Эти точки делят окружность на две **дуги**, выделенные на рисунке 8.1 разным цветом. Точки A и B называют **концами** дуги, они принадлежат каждой из выделенных дуг. Каждую из этих дуг можно обозначить так: $\cup AB$ (читают: «дуга AB»).

Однако по записи $\cup AB$ невозможно отличить дуги на рисунке 8.1. Если на какой-нибудь из двух дуг отметить точку (на рис. 8.2 это точка M), то понятно, что обозначение $\cup AMB$ относится к фиолетовой дуге. Если на одной из двух дуг AB отмечена точка, то договоримся, что обозначение $\cup AB$ относится к дуге, которой эта точка не принадлежит (на рисунке 8.2 это зелёная дуга).

Дуга AB принадлежит центральному углу AOB (рис. 8.2). В этом случае говорят, что центральный угол AOB **опирается на дугу** AB.

Каждая дуга окружности, как и вся окружность, имеет **градусную меру**. *Градусную меру всей окружности считают равной* $360°$. Если центральный угол MON опирается на дугу MN (рис. 8.3), то гра-

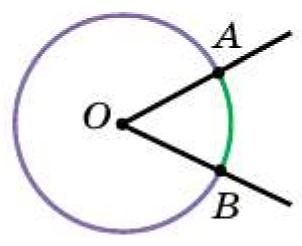


Рис. 8.1

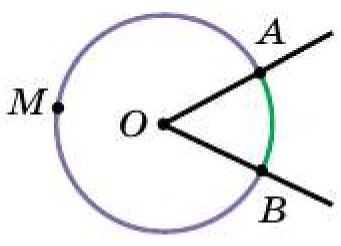


Рис. 8.2

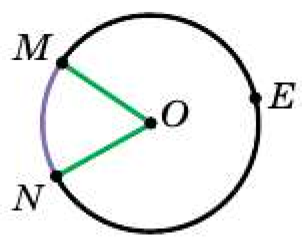


Рис. 8.3

дусную меру дуги MN считают равной градусной мере угла MON и записывают: $\cup MN = \angle MON$ (читают: «градусная мера дуги MN равна градусной мере угла MON»). Градусную меру дуги MEN (рис. 8.3) считают равной $360° - \angle MON$.

На рисунке 8.4 изображена окружность, в которой проведены два перпендикулярных диаметра AB и CD. Тогда $\cup AMD = 90°$, $\cup ACD = 360° - 90° = 270°$, $\cup ACB = \cup ADB = 180°$. Каждую из дуг ACB и ADB называют **полуокружностью**. На рисунке 8.4 полуокружностями являются также дуги CAD и CBD.

О хорде, соединяющей концы дуги, говорят, что хорда **стягивает** дугу. На рисунке 8.5 хорда AB стягивает каждую из дуг AB и AKB.

Любая хорда стягивает две дуги, сумма градусных мер которых равна $360°$.

Определение

Вписанным углом окружности называют угол, вершина которого лежит на окружности, а стороны пересекают окружность.

На рисунке 8.6 угол ABC — вписанный. Дуга AC принадлежит этому углу, а дуга ABC — не принадлежит. В таком случае говорят, что вписанный угол ABC **опирается на дугу** AC. Также можно сказать, что вписанный угол ABC **опирается на хорду** AC.

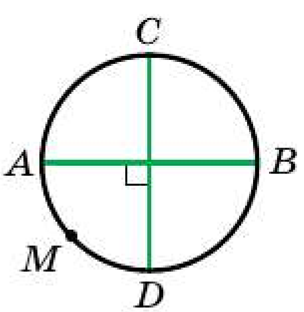


Рис. 8.4

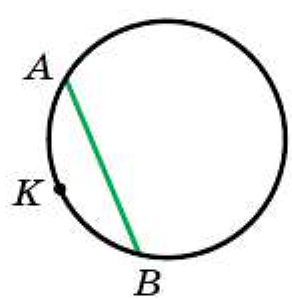


Рис. 8.5

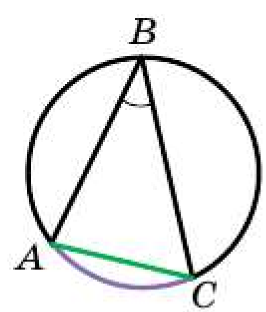


Рис. 8.6

Теорема 8.1

Градусная мера вписанного угла равна половине градусной меры дуги, на которую он опирается.

Доказательство

На рисунке 8.6 угол ABC вписанный. Докажем, что $\angle ABC = \frac{1}{2} \cup AC$.

Рассмотрим три случая расположения центра O окружности относительно вписанного угла ABC.

1) Центр O принадлежит одной из сторон угла, например стороне BC (рис. 8.7).

Проведём радиус OA. Центральный угол AOC — внешний угол равнобедренного треугольника ABO (стороны OA и OB равны как радиусы). Тогда $\angle AOC = \angle A + \angle B$. Однако $\angle A = \angle B$. Отсюда $\angle ABC = \frac{1}{2}\angle AOC = \frac{1}{2}\cup AC$.

2) Центр O принадлежит углу, однако не принадлежит ни одной из его сторон (рис. 8.8).

Проведём диаметр BK. Согласно доказанному $\angle ABK = \frac{1}{2}\cup AK$, $\angle KBC = \frac{1}{2}\cup KC$. Имеем: $\angle ABC = \angle ABK + \angle KBC = \frac{1}{2}\cup AK + \frac{1}{2}\cup KC = \frac{1}{2}\cup AKC$.

3) Центр O не принадлежит углу (рис. 8.9).

Для третьего случая проведите доказательство самостоятельно. ■

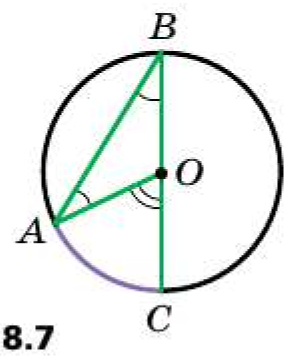


Рис. 8.7

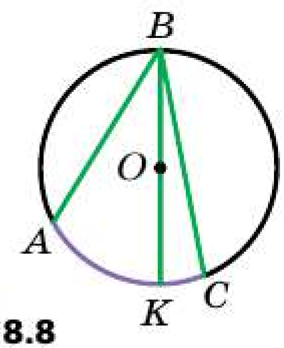


Рис. 8.8

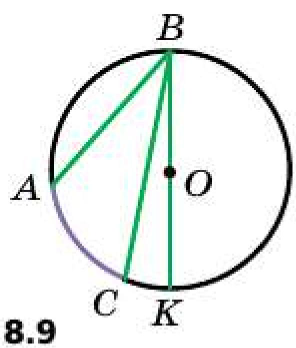


Рис. 8.9

Следствие 1

Вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу, равны (рис. 8.10).

Следствие 2

Вписанный угол, опирающийся на диаметр (полуокружность), — прямой (рис. 8.11).

Докажите эти свойства самостоятельно.

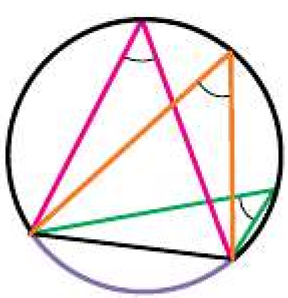


Рис. 8.10

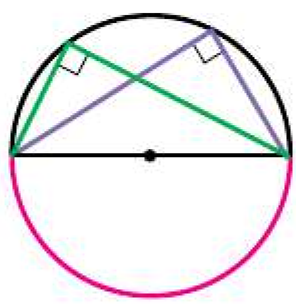


Рис. 8.11

Задача 1. Даны отрезок AB и угол α. Найдите геометрическое место точек X таких, что $\angle AXB = \alpha$.

Решение. Проведём два луча AF и BE так, чтобы $\angle BAF = \angle ABE = 90° - \frac{\alpha}{2}$. Пусть эти лучи пересекаются в точке C (рис. 8.12). Очевидно, что $\angle ACB = \alpha$. Опишем окружность около треугольника ABC. Все углы AXB, вершины которых принадлежат дуге ACB, равны углу α. Выполнив аналогичное построение в другой полуплоскости относительно прямой AB, получим треугольник ABC_1, около которого также опишем окружность. Дуги ACB и AC_1B, за исключением точек A и B, принадлежат искомому ГМТ.

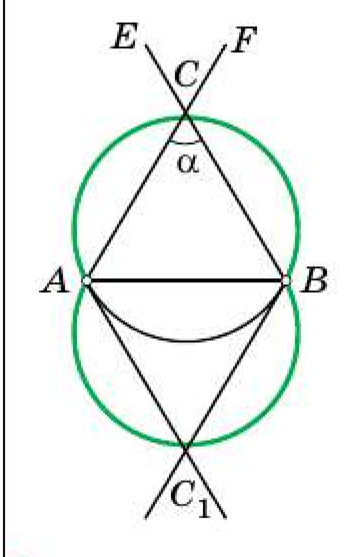


Рис. 8.12

Также следует доказать обратное утверждение: если точка X обладает указанным свойством, то она лежит на дуге ACB или на дуге AC_1B. Пользуясь методом от противного, сделайте это самостоятельно.

Теперь можно утверждать, что искомым ГМТ являются дуги ACB и AC_1B, изображённые на рисунке 8.12, за исключением точек A и B. ■

Задача 2. Постройте касательную к данной окружности, проходящую через данную точку, лежащую вне окружности.

Решение. На рисунке 8.13 изображены окружность с центром O и точка M, лежащая вне этой окружности.

Пусть X — такая точка окружности, что прямая MX является касательной (рис. 8.13). Тогда угол MXO прямой. Следовательно, его можно рассматривать как вписанный в окружность с диаметром MO.

Проведённый анализ показывает, как провести построение.

Построим отрезок MO и разделим его пополам (рис. 8.14). Пусть точка K — его середина. Построим окружность радиуса KO с центром K. Обозначим точки пересечения построенной и данной окружно-

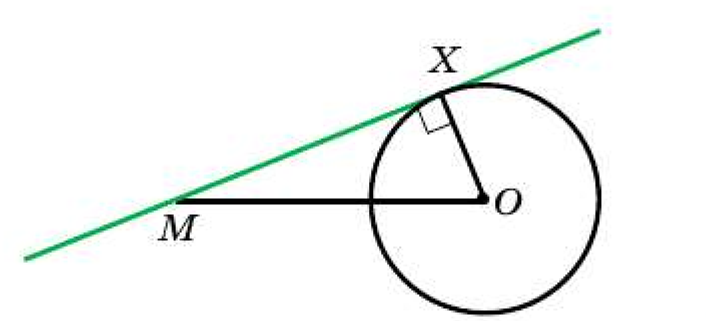


Рис. 8.13

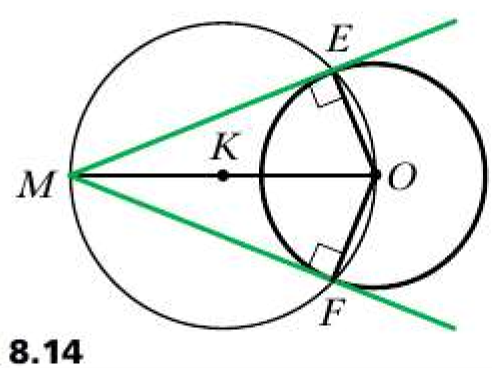


Рис. 8.14

стей буквами E и F. Тогда каждая из прямых ME и MF является искомой касательной.

Действительно, угол MEO равен $90°$ как вписанный угол, опирающийся на диаметр MO. Отрезок OE — радиус данной окружности. Тогда по признаку касательной прямая ME — искомая касательная. ■

1. Какой угол называют центральным углом окружности?
2. Как связаны градусные меры центрального угла окружности и дуги, на которую этот угол опирается?
3. Какой угол называют вписанным углом окружности?
4. Чему равна градусная мера вписанного угла?
5. Каким свойством обладают вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу?
6. Какова величина вписанного угла, опирающегося на диаметр (полуокружность)?

Упражнения

8.1. Чему равна градусная мера центрального угла окружности, опирающегося на дугу, которая составляет: 1) $\frac{1}{6}$ окружности; 2) $\frac{1}{10}$ окружности; 3) $\frac{1}{2}$ окружности; 4) $\frac{2}{9}$ окружности?

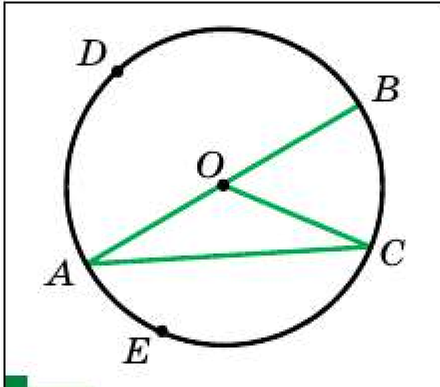


Рис. 8.15

8.2. Найдите градусные меры двух дуг окружности, на которые её делят две точки, если градусная мера одной из дуг на $80°$ больше градусной меры другой.

8.3. Найдите градусные меры двух дуг окружности, на которые её делят две точки, если градусные меры этих дуг относятся как $7 : 11$.

8.4. На рисунке 8.15 изображена окружность с центром O. Найдите:
1) угол BDC, если $\angle BAC = 40°$;
2) угол BEC, если $\angle BOC = 70°$;
3) дугу CE, если $\angle CDE = 80°$;
4) угол DBA, если $\cup DBA = 300°$.

8.5. На рисунке 8.16 $\cup AB = 74°$, $\angle ABC = 68°$. Найдите дугу BC.

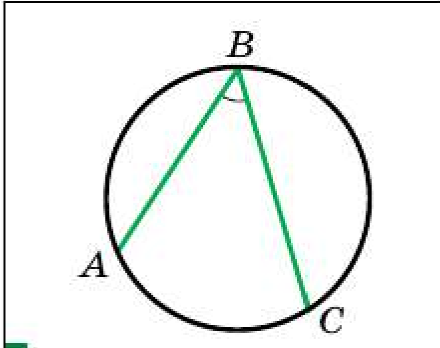


Рис. 8.16

8.6. Центральный угол AOC на $25°$ больше вписанного угла ABC, опирающегося на дугу AC (рис. 8.17). Найдите углы AOC и ABC.

8.7. На рисунке 8.18 хорды AB и CD равны. Докажите, что $\smile AMB = \smile CND$.

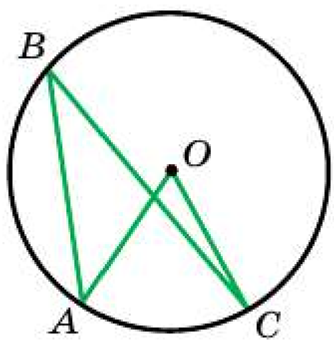


Рис. **8.17**

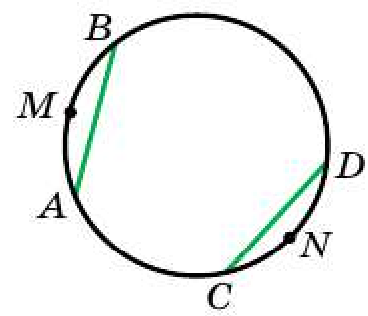


Рис. **8.18**

8.8. Докажите, что если две дуги окружности равны, то равны и хорды, их стягивающие.

8.9. Вершины квадрата $ABCD$ лежат на окружности. На дуге AB отметили произвольную точку M. Докажите, что $\angle AMD = \angle CMD = \angle CMB$.

8.10. Вершины равнобедренного треугольника ABC ($AB = BC$) делят описанную около него окружность на три дуги, причём $\smile AB = 70°$. Найдите углы треугольника ABC.

8.11. Острый угол прямоугольного треугольника равен $32°$. Найдите градусные меры дуг, на которые вершины треугольника делят окружность, описанную около него, и радиус этой окружности, если гипотенуза данного треугольника равна 12 см.

8.12. Докажите, что если вписанный угол является прямым, то он опирается на диаметр.

8.13. Как, пользуясь только угольником, найти центр данной окружности?

8.14. Окружность, построенная на стороне AB треугольника ABC как на диаметре, пересекает прямые AC и BC в точках M и K соответственно. Докажите, что отрезки AK и BM — высоты треугольника ABC.

8.15. Окружность, построенная на стороне AC треугольника ABC как на диаметре, пересекает сторону AB в точке K так, что $\angle ACK = \angle BCK$. Докажите, что треугольник ABC равнобедренный.

8.16. Докажите, что сторона треугольника, лежащая против угла $30°$, равна радиусу окружности, описанной около треугольника.

8.17. Точка O — центр окружности. Хорда AB перпендикулярна радиусу OM и делит его пополам. Найдите углы AOB и BAM.

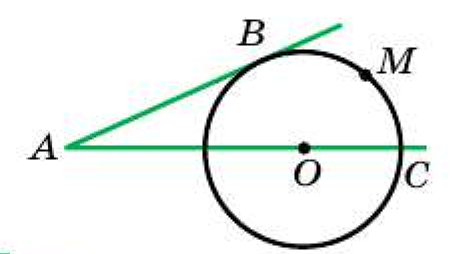


Рис. 8.19

8.18. Через точку A, лежащую вне окружности с центром O, проведены две прямые, одна из которых касается окружности в точке B, а вторая проходит через её центр (рис. 8.19). Известно, что $\cup BMC = 100°$. Найдите угол BAC.

8.19. Биссектриса угла B треугольника ABC пересекает окружность, описанную около этого треугольника, в точке D. Найдите углы треугольника ADC, если $\angle ABC = 80°$.

8.20. На дуге AC окружности, описанной около равностороннего треугольника ABC, отметили точку M так, что $\cup AM = 2\cup CM$. Найдите углы треугольника AMC.

8.21. Докажите, что градусные меры дуг окружности, заключённых между двумя параллельными хордами, равны.

8.22. Угол при вершине равнобедренного треугольника равен 56°. На боковой стороне треугольника как на диаметре построена полуокружность, которую остальные стороны треугольника делят на три дуги. Найдите градусные меры образовавшихся дуг.

8.23. Две окружности пересекаются в точках A и B. Через точку A проведены диаметры AD и AC. Докажите, что точки B, C и D лежат на одной прямой.

8.24. Две окружности пересекаются в точках A и B. Через точку B проведена секущая, которая пересекает окружности в точках C и D. Докажите, что величина угла CAD является постоянной для всех секущих, проходящих через точку B.

8.25. Биссектриса угла A треугольника ABC пересекает описанную около него окружность в точке D. Точка O — центр вписанной окружности треугольника ABC. Докажите, что $DO = DB = DC$.

8.26. Биссектриса угла A треугольника ABC пересекает описанную около него окружность в точке D. Точки O и J — центры описанной и вписанной окружностей треугольника ABC соответственно. Постройте треугольник ABC по точкам O, J и D.

8.27. Окружность, построенная на стороне параллелограмма как на диаметре, проходит через середину соседней стороны и точку пересечения диагоналей. Найдите углы параллелограмма.

8.28. В окружности проведены две перпендикулярные хорды AB и CD, пересекающиеся в точке M. Докажите, что прямая, содержащая медиану треугольника DMB, содержит также высоту треугольника CMA.

8.29. В окружности проведены две перпендикулярные хорды AB и CD, пересекающиеся в точке M. Докажите, что прямая, содержащая высоту треугольника DMB, содержит также медиану треугольника CMA.

8.30. Точка H — ортоцентр треугольника ABC. Прямая AH пересекает описанную окружность треугольника ABC в точке A_1. Докажите, что прямая BC делит отрезок HA_1 пополам.

8.31. Отрезок AH — высота треугольника ABC. Докажите, что $\angle BAH = \angle OAC$, где точка O — центр описанной окружности треугольника ABC.

8.32. Прямые, содержащие высоты остроугольного треугольника ABC, пересекают его описанную окружность в точках A_1, B_1 и C_1. Докажите, что ортоцентр треугольника ABC является центром вписанной окружности треугольника $A_1B_1C_1$.

8.33. Прямые, содержащие высоты остроугольного треугольника ABC, пересекают его описанную окружность в точках A_1, B_1 и C_1. Постройте по этим точкам треугольник ABC.

8.34. Прямые, содержащие биссектрисы треугольника ABC, пересекают его описанную окружность в точках A_1, B_1 и C_1. Докажите, что центр вписанной окружности треугольника ABC является ортоцентром треугольника $A_1B_1C_1$.

8.35. Прямые, содержащие биссектрисы треугольника ABC, пересекают его описанную окружность в точках A_1, B_1 и C_1. Постройте по этим точкам треугольник ABC.

8.36. Докажите, что описанная окружность треугольника ABC, биссектриса угла B и серединный перпендикуляр стороны AC проходят через одну точку.

8.37. В треугольнике ABC проведены высота BD, медиана BM и биссектриса BK. Известно, что $\angle DBK = \angle KBM$. Докажите, что $\angle ABC = 90°$.

8.38. В треугольнике ABC высота BD, медиана BM и биссектриса BK делят угол ABC на четыре равных угла. Найдите углы треугольника ABC.

8.39. В треугольнике ABC проведены высота BD, медиана BM и биссектриса BK. Докажите, что точка K принадлежит отрезку DM.

8.40. Постройте треугольник ABC по точке A, центру описанной окружности и точке пересечения биссектрисы угла A со стороной BC.

8.41. Постройте прямоугольный треугольник ABC ($\angle C = 90°$) по точкам A, B и точке M, лежащей на биссектрисе угла C.

8.42. Постройте треугольник по медиане, биссектрисе и высоте, выходящим из одной вершины.

8.43. Прямые, содержащие высоту, биссектрису и медиану, выходящие из вершины B треугольника ABC, пересекают его описанную окружность в точках M, N и K соответственно. Постройте треугольник ABC по точкам M, N и K.

8.44. Дана окружность, в которой проведён диаметр AB. Вне окружности отметили точку C так, как показано на рисунке 8.20. Как, пользуясь только линейкой, провести через точку C прямую, перпендикулярную прямой AB?

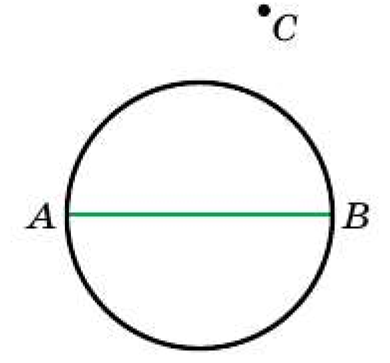


Рис. 8.20

8.45. Постройте треугольник по стороне, противолежащему ей углу и высоте, проведённой к данной стороне.

8.46. Постройте треугольник по стороне, противолежащему ей углу и медиане, проведённой к данной стороне.

8.47. Постройте параллелограмм по двум сторонам и углу между диагоналями.

8.48. Постройте параллелограмм по углу и двум диагоналям.

8.49. Дан отрезок AB. Найдите геометрическое место точек X таких, что треугольник AXB прямоугольный.

8.50. Центры вписанной и описанной окружностей треугольника ABC лежат по разные стороны от прямой AB. Сторона AB равна радиусу описанной окружности. Чему равен угол AOB, где точка O — центр вписанной окружности?

8.51. Прямые, содержащие высоты остроугольного треугольника ABC, проведённые из вершин B и C, пересекают описанную окружность в точках B_1 и C_1 соответственно. Найдите угол A треугольника ABC, если прямая B_1C_1 проходит через центр описанной окружности.

8.52. В остроугольном треугольнике ABC точки B, H, O и C, где H — ортоцентр, O — центр описанной окружности, лежат на одной окружности. Найдите угол BAC.

8.53. В остроугольном треугольнике ABC точка H — ортоцентр, точка O — центр описанной окружности, точка J — центр вписанной окружности, $\angle BAC = 60°$. Докажите, что точки B, H, O, J и C лежат на одной окружности.

8.54. Многоугольник, все вершины которого принадлежат одной окружности, разделён непересекающимися диагоналями на треугольники. Докажите, что среди указанных треугольников только один может быть остроугольным.

8.55. В окружность вписан прямоугольный треугольник ABC с гипотенузой AB. На большем катете BC отметили точку D так, что $AC = BD$. Точка E — середина дуги ACB. Найдите угол DEC.

8.56. На рисунке 8.21 изображены две окружности с центрами O_1 и O_2. Постройте прямую l, которая касается этих окружностей так, что точки касания лежат в одной полуплоскости относительно прямой O_1O_2 (такую прямую называют **внешней общей касательной** к двум данным окружностям).

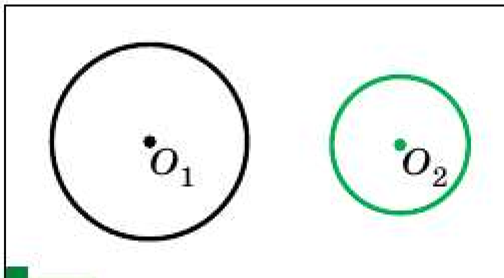


Рис. **8.21**

8.57. Постройте треугольник по стороне, противолежащему ей углу и радиусу вписанной окружности.

8.58. Постройте треугольник по стороне, противолежащему ей углу и медиане, проведённой к другой стороне.

8.59. На хорде AB окружности с центром O отметили точку C. Описанная окружность треугольника AOC пересекает данную окружность в точке D. Докажите, что $BC = CD$.

8.60. Постройте квадрат по четырём точкам, лежащим по одной на каждой из четырёх его сторон.

§ 9 Применение свойств центральных и вписанных углов при решении задач

Задача 1 (свойство угла между касательной и хордой). Отрезок AB — хорда окружности с центром O (рис. 9.1). Через точку A проведена касательная MN. Докажите, что $\angle MAB = \frac{1}{2} \cup AB$ и $\angle NAB = \frac{1}{2} \cup ADB$.

Решение. Проведём диаметр AD (рис. 9.1). Тогда угол B равен $90°$ как вписанный, опирающийся на диаметр AD. В прямоугольном треугольнике ABD $\angle 2 + \angle 3 = 90°$. Поскольку прямая MN — касательная, то $\angle DAM = 90°$. Тогда $\angle 1 + \angle 3 = 90°$. Получаем, что $\angle 1 = \angle 2$.

Следовательно, $\angle MAB = \angle BDA = \frac{1}{2}\cup AB$.

Имеем: $\angle NAB = 180° - \angle MAB = 180° - \frac{1}{2}\cup AB = 180° - \frac{1}{2}(360° - \cup ADB) = 180° - 180° + \frac{1}{2}\cup ADB = \frac{1}{2}\cup ADB$. ■

Справедливо и обратное утверждение. *Пусть отрезок AB — хорда окружности с центром O и через точку A проведена прямая MN так, что* $\angle MAB = \frac{1}{2}\cup AB$ (рис. 9.1). *Тогда прямая MN — касательная к окружности.*

Используя метод доказательства от противного, докажите это утверждение самостоятельно.

Задача 2. Хорды AB и CD окружности пересекаются в точке M (рис. 9.2). Докажите, что $\angle AMC = \frac{1}{2}(\cup AC + \cup BD)$.

Решение. Угол AMC является внешним для треугольника AMD. Тогда $\angle AMC = \angle DAB + \angle ADC = \frac{1}{2}\cup DB + \frac{1}{2}\cup AC = \frac{1}{2}(\cup AC + \cup BD)$. ■

Задача 3. Хорды AB и CD окружности не пересекаются, а прямые AB и CD пересекаются в точке M (рис. 9.3). Докажите, что $\angle AMC = \frac{1}{2}(\cup AC - \cup BD)$.

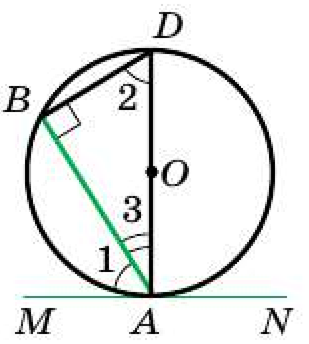


Рис. 9.1

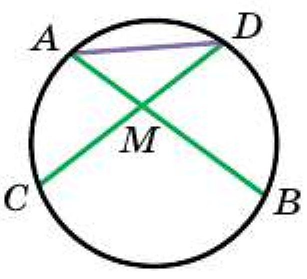


Рис. 9.2

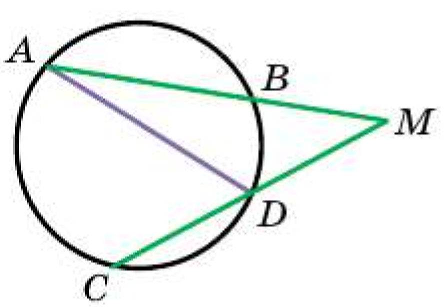


Рис. 9.3

Решение. Угол ADC является внешним для треугольника ADM. Тогда $\angle ADC = \angle DAM + \angle AMD$. Отсюда $\angle AMD = \angle ADC - \angle DAM = \frac{1}{2}\cup AC - \frac{1}{2}\cup BD = \frac{1}{2}(\cup AC - \cup BD)$. ■

Задача 4. Точки O и C расположены в одной полуплоскости относительно прямой AB. Известно, что $OA = OB$ и $\angle AOB = 2\angle ACB$. Докажите, что точки A, B и C лежат на окружности с центром O.

Решение. Проведём окружность радиуса OB с центром в точке O. Тогда дуга AXB является геометрическим местом точек, лежащих в одной полуплоскости относительно прямой AB, из которых отрезок AB виден под углом $\frac{1}{2}\angle AOB$ (рис. 9.4).

Поскольку точка C лежит в этой же полуплоскости и $\angle ACB = \frac{1}{2}\angle AOB$, то точка C принадлежит указанному ГМТ. ■

Задача 5. Точки O и C расположены в разных полуплоскостях относительно прямой AB. Известно, что $AO = OB$ и $\angle AOB = 2(180° - \angle ACB)$. Докажите, что точки A, B и C лежат на окружности с центром O.

Это утверждение докажите самостоятельно.

Задача 6. Две окружности касаются в точке M. Через точку M проведены прямые, пересекающие одну окружность в точках A_1 и B_1, а другую — в точках A_2 и B_2 (рис. 9.5). Докажите, что $A_1B_1 \parallel A_2B_2$.

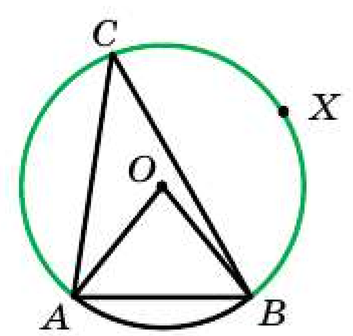


Рис. 9.4

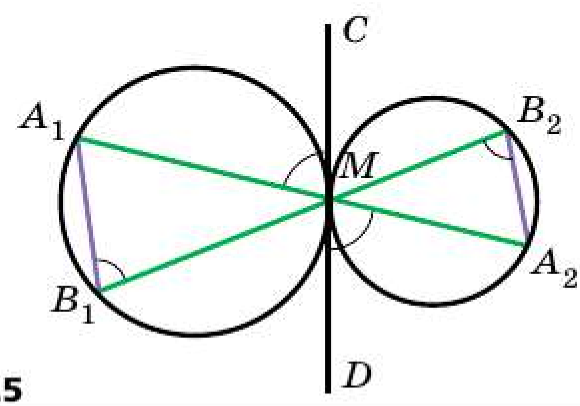


Рис. 9.5

Решение. Через точку M проведём касательную CD к одной из окружностей (рис. 9.5). Эта прямая будет касательной и к другой окружности (докажите этот факт самостоятельно). Используя ключевую задачу 1, можно записать: $\angle A_1MC = \frac{1}{2}\cup A_1M$. Поскольку угол A_1B_1M вписанный, то $\angle A_1B_1M = \frac{1}{2}\cup A_1M$. Отсюда $\angle A_1B_1M = \angle A_1MC$. Аналогично доказываем, что $\angle MB_2A_2 = \angle A_2MD$. Но углы A_1MC и A_2MD равны как вертикальные, следовательно, $\angle A_1B_1M = \angle A_2B_2M$ и $A_1B_1 \parallel A_2B_2$.

Заметим, что доказанное утверждение справедливо и в случае внутреннего касания окружностей (рис. 9.6). Докажите это самостоятельно. ■

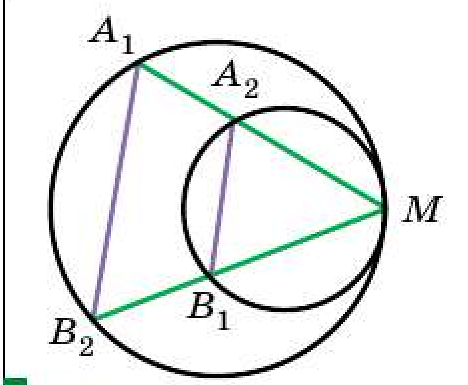


Рис. 9.6

Задача 7. В треугольнике ABC проведена биссектриса BL. Через точку L к окружности, описанной около треугольника BCL, проведена касательная, пересекающая сторону AB в точке P (рис. 9.7). Докажите, что прямая AC — касательная к окружности, описанной около треугольника BPL.

Решение. По свойству угла между касательной и хордой (см. ключевую задачу 1) имеем: $\angle CLK = \frac{1}{2} \cup LC = \angle LBC = \angle LBP$. Углы ALP и KLC равны как вертикальные. Отсюда $\angle ALP = \angle LBP = \frac{1}{2} \cup LP$.

С учётом утверждения, обратного доказанному в ключевой задаче 1, получаем, что прямая AC — касательная к окружности, проходящей через точки L, P и B. ■

Задача 8. В окружности с центром O проведена хорда AB. На продолжении отрезка AB за точку B отметили точку C так, что отрезок BC равен радиусу окружности. Прямая CO пересекает окружность в точке D (точка O лежит между точками D и C). Докажите, что $\angle AOD = 3\angle ACD$ (рис. 9.8).

Решение. Пусть $\angle ACD = \alpha$, K — точка пересечения прямой CD с окружностью. Проведём радиус OB (рис. 9.8). Поскольку $OB = BC$, то $\angle BOK = \alpha$. Тогда $\cup KB = \alpha$. Используя ключевую задачу 3, можно записать: $\angle DCA = \frac{1}{2}(\cup DA - \cup KB)$. Тогда $\alpha = \frac{1}{2} \cup DA - \frac{\alpha}{2}$. Отсюда $\cup DA = 3\alpha$, т. е. $\angle DOA = 3\alpha$. ■

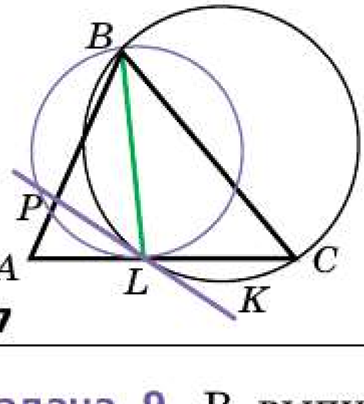


Рис. 9.7

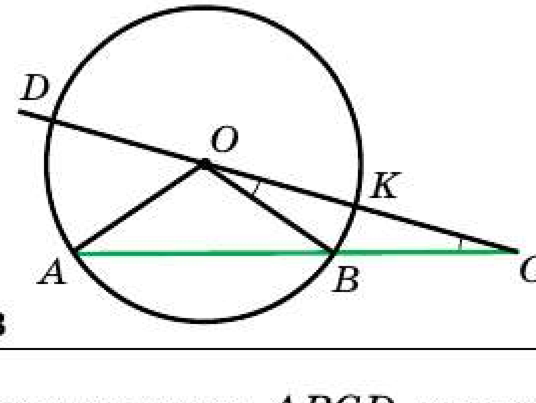


Рис. 9.8

Задача 9. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ известно, что $\angle BAD = 100°$, $\angle BCD = 130°$, $AB = AD$ (рис. 9.9). Докажите, что $AB = AC$.

Решение. Поскольку $\angle BAD = 2(180° - \angle BCD)$ и $AB = AD$, то с учётом доказанного в ключевой задаче 5 можно утверждать, что точки B, C и D лежат на окружности радиуса AB с центром A. Следовательно, отрезок AC — радиус этой окружности. Отсюда $AB = AC$. ■

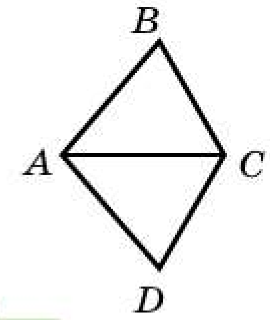


Рис. **9.9**

Упражнения

9.1. Концы хорды делят окружность на две дуги, градусные меры которых относятся как 3 : 1. Через один из концов хорды проведена касательная к данной окружности. Найдите острый угол между этой касательной и данной хордой.

9.2. Вписанная окружность треугольника ABC касается его сторон AB, BC и CA соответственно в точках C_1, A_1 и B_1. Найдите углы треугольника $A_1B_1C_1$, если $\angle A = 38°$, $\angle B = 86°$.

9.3. Хорды AB и CD окружности пересекаются в точке M (рис. 9.10), $\cup AC = 50°$, $\cup BD = 70°$. Найдите угол AMC.

9.4. Хорды AB и CD окружности не пересекаются, а прямые AB и CD пересекаются в точке M (рис. 9.11), $\cup AC = 100°$, $\cup BD = 30°$. Найдите угол AMC.

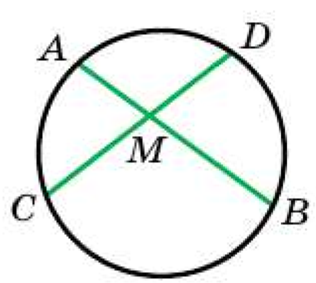


Рис. **9.10**

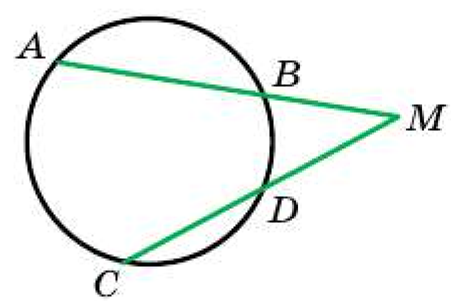


Рис. **9.11**

9.5. Хорды AB и CD окружности пересекаются в точке M так, что $\angle AMC = 40°$. Градусная мера дуги AD на 20° больше градусной меры дуги BC. Найдите градусную меру дуги AD.

9.6. Диаметр AB и хорда CD окружности пересекаются в точке M. Известно, что $\angle CMB = 73°$ и $\cup BC = 110°$. Найдите градусную меру дуги BD.

9.7. Докажите, что окружность, касающаяся боковых сторон AB и BC равнобедренного треугольника ABC в точках A и C соответственно, проходит через центр вписанной окружности этого треугольника.

9.8. В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC как на диаметре построена окружность, пересекающая гипотенузу AB в точке E. Через точку E проведена касательная, пересекающая катет CB в точке D. Докажите, что треугольник BDE равнобедренный.

9.9. К окружности, описанной около треугольника ABC, проведена в точке B касательная, пересекающая прямую AC в точке D. Отрезок BM — биссектриса треугольника ABC. Докажите, что $BD = MD$.

9.10. Прямая касается двух окружностей с центрами O_1 и O_2 в точках C и D соответственно (рис. 9.12), A и B — точки пересечения окружностей. Найдите угол O_1AO_2, если $\angle CAD = \alpha$.

9.11. К двум окружностям, пересекающимся в точках M и K, проведена общая касательная, A и B — точки касания. Докажите, что $\angle AMB + \angle AKB = 180°$.

9.12. Две окружности пересекаются в точках A и B. Через точку B проведена прямая, пересекающая окружности в точках C и D. Касательные к этим окружностям, проведённые через точки C и D, пересекаются в точке P (рис. 9.13). Найдите угол P, если $\angle DAC = \alpha$.

9.13. На окружности отметили четыре точки. Середины образовавшихся дуг соединили отрезками, как показано на рисунке 9.14. Докажите, что проведённые отрезки перпендикулярны.

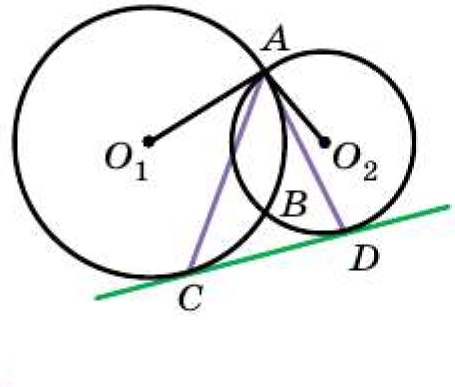


Рис. 9.12

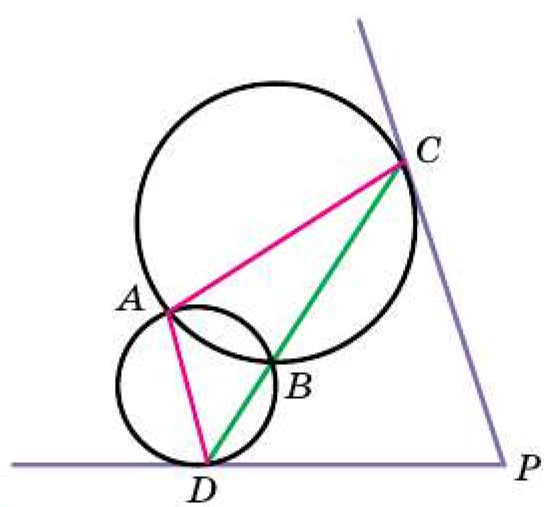


Рис. 9.13

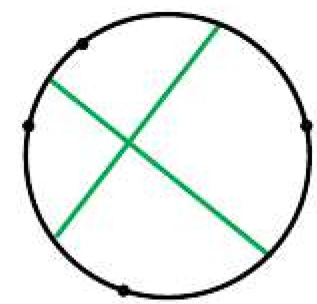


Рис. 9.14

9.14. В окружности проведены хорды CD и CE, где точка C — середина дуги AB (рис. 9.15). Найдите угол DEC, если $\angle AMD = \alpha$.

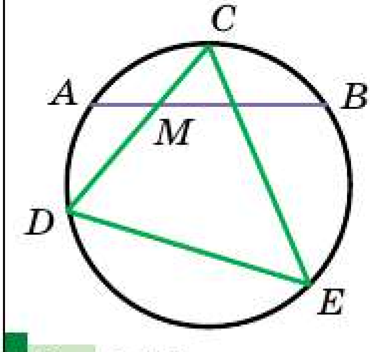


Рис. 9.15

9.15. Докажите, что биссектриса внешнего угла при вершине A треугольника ABC, вписанного в окружность, параллельна хорде, соединяющей середины дуг AB и AC.

9.16. В окружности проведена хорда. На меньшей из образовавшихся дуг отметили точку и через неё провели касательную к окружности. Найдите на касательной точку, из которой хорда видна под наибольшим углом.

9.17. В равнобедренном треугольнике ABC ($AB = BC$) на боковой стороне AB отметили точку D. Около треугольника ADC описана окружность. Касательная, проведённая к этой окружности в точке D, пересекает описанную окружность треугольника BDC в точке M. Докажите, что $BM \parallel AC$.

9.18. Около треугольника ABC описана окружность с центром O. Окружность, проходящая через точки A, B и O, касается прямой AC в точке A. Докажите, что $AB = AC$.

9.19. Серединный перпендикуляр биссектрисы AD треугольника ABC пересекает луч BC в точке N (рис. 9.16). Докажите, что прямая NA — касательная к окружности, описанной около треугольника ABC.

9.20. В треугольнике ABC проведена биссектриса AM. Через точки A и M проведена окружность, пересекающая стороны AC и AB в точках K и L соответственно. Докажите, что если $KL \parallel CB$, то прямая BC — касательная к окружности.

9.21. Пусть O — точка пересечения диагоналей параллелограмма $ABCD$, P — вторая точка пересечения окружности, проходящей через точки A, O, B, с прямой BC (рис. 9.17). Докажите, что прямая AP касается окружности, проходящей через точки A, O и D.

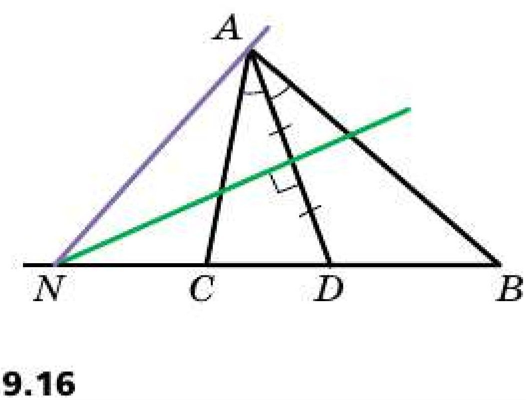


Рис. **9.16**

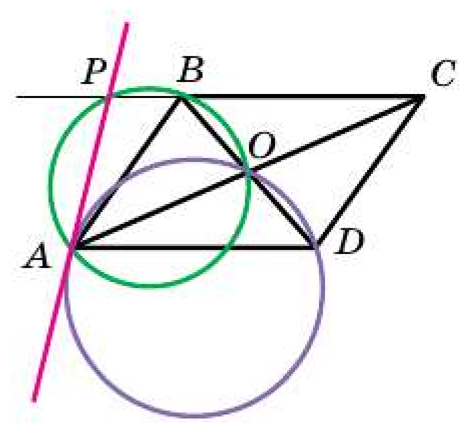


Рис. **9.17**

9.22. Дан квадрат $ABCD$. Вне квадрата отметили точку E так, что $\angle BAE = 30°$, $\angle BCE = 75°$. Найдите угол CBE.

9.23. В треугольнике ABC $\angle C = 10°$, $\angle B = 20°$. Вне треугольника отметили точку M так, что треугольник CMB равносторонний, точки M и A лежат в разных полуплоскостях относительно прямой BC. Найдите углы MAB и MAC.

9.24. Даны равнобедренный треугольник ABC ($AB = AC$) и точка M, ему не принадлежащая, но принадлежащая углу ABC. Найдите угол BAM, если $\angle ABC = 50°$, $\angle BMC = 40°$, $\angle BMA = 10°$.

9.25. В треугольнике ABC $\angle BAC = 30°$, $\angle ABC = 80°$. В треугольнике отметили такую точку K, что треугольник BCK равносторонний. Найдите угол KAB.

9.26. В трапеции $ABCD$ ($AD \parallel BC$) угол ADB в 2 раза меньше угла ACB, $BC = AC = 5$ см. Найдите сторону CD.

9.27. Точки H и O — соответственно ортоцентр и центр описанной окружности треугольника ABC. Пусть точка M — середина дуги ACB. Докажите, что если $\angle C = 120°$, то $MH = MO$.

9.28. Окружность, проходящая через вершины B и C прямоугольного треугольника ABC, пересекает гипотенузу AB в точке D. Касательные к этой окружности, проведённые в точках C и D, пересекаются в точке O. Докажите, что $OA = OC$.

9.29. Точка M принадлежит квадрату $ABCD$, $\angle MAC = \angle MCD = \alpha$. Найдите угол ABM.

9.30. В четырёхугольнике три тупых угла. Докажите, что большей из двух его диагоналей является та, которая проведена из вершины острого угла.

9.31. Две окружности имеют внешнее касание в точке D. Провели прямую, которая касается одной окружности в точке A, а другую пересекает в точках B и C (рис. 9.18). Докажите, что точка A равноудалена от прямых DB и DC.

9.32. В окружности проведена хорда AB. Вторая окружность касается этой хорды в точке M и первой окружности в точке K (рис. 9.19). Докажите, что KM — биссектриса угла AKB.

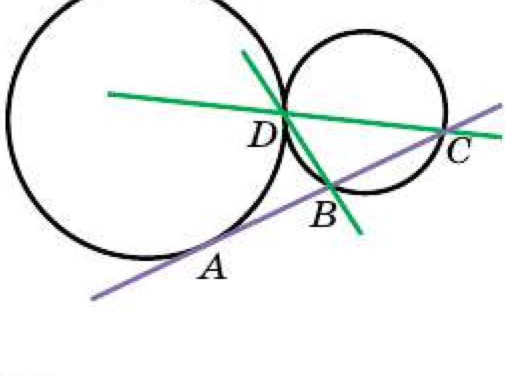


Рис. **9.18**

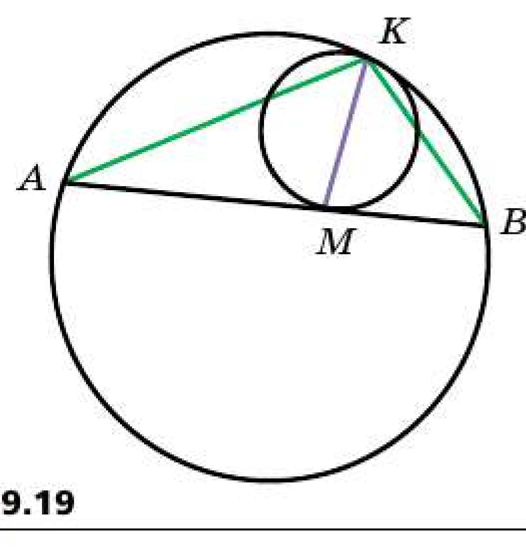


Рис. **9.19**

§ 10 Вписанные четырёхугольники. Метод вспомогательной окружности

Определение

Четырёхугольник называют вписанным в окружность, если существует окружность, которой принадлежат все его вершины.

На рисунке 10.1 изображён вписанный четырёхугольник $ABCD$. В этом случае также говорят, что окружность **описана около** четырёхугольника.

Теорема 10.1

Если четырёхугольник является вписанным в окружность, то сумма его противолежащих углов равна 180°.

Доказательство

Пусть четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность (рис. 10.1). Докажем, что $\angle A + \angle C = 180°$ и $\angle B + \angle D = 180°$.

Поскольку углы A и C являются вписанными, то $\angle A = \frac{1}{2} \cup BCD$ и $\angle C = \frac{1}{2} \cup DAB$. Имеем: $\cup BCD + \cup DAB = 360°$. Тогда $\angle A + \angle C = 180°$.

Аналогично можно показать, что $\angle B + \angle D = 180°$. ■

Вы знаете, что около любого треугольника можно описать окружность. Однако не каждый четырёхугольник обладает таким свойством. Например, невозможно описать окружность около параллелограмма, отличного от прямоугольника. Распознавать четырёхугольники, около которых можно описать окружность, позволяет следующая теорема.

Теорема 10.2

(обратная теореме 10.1)

Если в четырёхугольнике сумма противолежащих углов равна 180°, то он является вписанным в окружность.

Доказательство

Рассмотрим четырёхугольник $ABCD$, в котором $\angle A + \angle C = 180°$. Докажем, что около него можно описать окружность.

Предположим, что около этого четырёхугольника нельзя описать окружность. Опишем окружность около треугольника ABD. По предположению точка C не принадлежит этой окружности. Поэтому возможны два случая.

1) Точка C лежит вне описанной окружности треугольника ABD (рис. 10.2).

Пусть сторона BC пересекает окружность в точке C_1. Четырёхугольник ABC_1D вписан в окружность. Тогда по теореме 10.1 получаем, что $\angle A + \angle BC_1D = 180°$. Но по условию $\angle A + \angle C = 180°$. Отсюда $\angle BC_1D = \angle C$. Однако это равенство выполняться не может, так как по свойству внешнего угла треугольника $\angle BC_1D = \angle C + \angle CDC_1$.

Итак, точка C не может лежать вне окружности, описанной около треугольника ABD.

2) Точка C лежит внутри описанной окружности треугольника ABD (рис. 10.3).

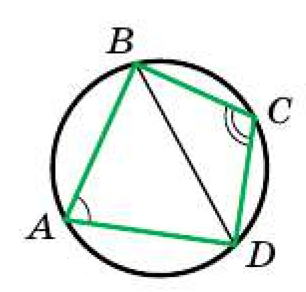


Рис. 10.1

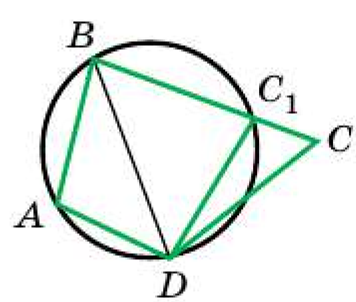


Рис. 10.2

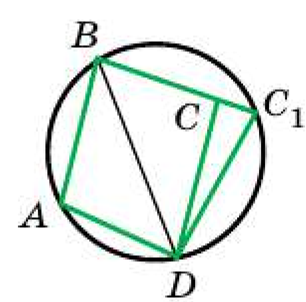


Рис. 10.3

Рассуждая аналогично, можно показать, что точка C не может лежать внутри рассматриваемой окружности. Убедитесь в этом самостоятельно.

Таким образом, предположив, что точка C не принадлежит окружности, описанной около треугольника ABD, мы получили противоречие. ■

Теорему 10.2 можно рассматривать как признак принадлежности четырёх точек одной окружности.

Теоремы 10.1 и 10.2 можно сформулировать в виде одной теоремы:

для того чтобы четырёхугольник был вписанным в окружность, необходимо и достаточно, чтобы сумма его противолежащих углов была равна $180°$.

Если четырёхугольник является вписанным, то существует точка, равноудалённая от всех его вершин (центр описанной окружности). Чтобы найти эту точку, достаточно найти точку пересечения серединных перпендикуляров двух соседних сторон четырёхугольника.

Задача 1 (признак принадлежности четырёх точек одной окружности). Точки A, M, N и B таковы, что $\angle AMB = \angle ANB$, причём точки M и N лежат в одной полуплоскости относительно прямой AB. Докажите, что точки A, M, N и B лежат на одной окружности.

Решение. Пусть $\angle AMB = \angle ANB = \alpha$. Около треугольника AMB опишем окружность (рис. 10.4). Пусть C — произвольная точка окружности, не принадлежащая дуге AMB. Тогда четырёхугольник $ACBM$ вписанный. Отсюда $\angle C = 180° - \alpha$. Имеем: $\angle C + \angle N = 180°$. Следовательно, по теореме 10.2 четырёхугольник $ACBN$ также вписанный. Поскольку около треугольника ABC можно описать только одну окружность, то этой окружности принадлежат как точка M, так и точка N. ■

Если при решении задачи удаётся доказать, что некоторые четыре точки лежат на одной окружности, то благодаря этому мы получаем возможность использовать свойства окружности и её элементов. Поэтому поиск такой вспомогательной окружности — красивый и эффективный приём для решения целого ряда задач. Продемонстрируем это на примерах.

Задача 2. Из произвольной точки M катета AC прямоугольного треугольника ABC опущен перпендикуляр MK на гипотенузу AB. Докажите, что $\angle MKC = \angle MBC$.

Решение. Имеем: $\angle BCA = 90°$, $\angle MKB = 90°$ (рис. 10.5), тогда $\angle BCA + \angle MKB = 180°$. Следовательно, около четырёхугольника $CBKM$ можно описать окружность. Углы MKC и MBC являются вписанными, опирающимися на одну и ту же дугу CM. Отсюда $\angle MKC = \angle MBC$. ■

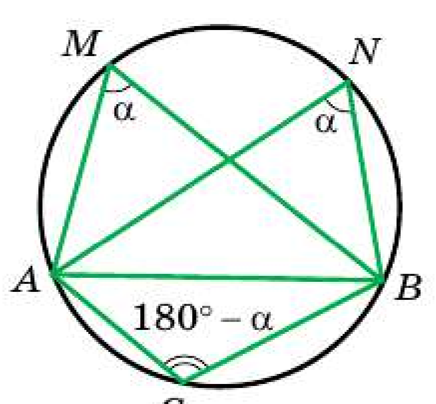


Рис. 10.4

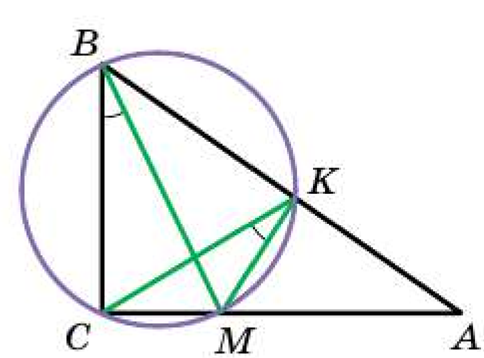


Рис. 10.5

Задача 3. На сторонах BC и CD квадрата $ABCD$ отмечены точки M и N так, что $\angle MAN = 45°$. Пользуясь только линейкой, опустите перпендикуляр из точки A на прямую MN.

Решение. Проведём диагональ BD. Она пересекает отрезки AN и AM в точках K и P соответственно (рис. 10.6).

Имеем: $\angle MBK = \angle MAK = 45°$. Следовательно, точки A, B, M и K лежат на одной окружности. Отсюда $\angle ABM + \angle AKM = 180°$.

Поскольку $\angle ABM = 90°$, то $\angle AKM = 90°$. Таким образом, отрезок MK — высота треугольника AMN. Аналогично можно доказать, что отрезок NP — высота треугольника AMN.

Следовательно, прямая, проходящая через точку A и точку пересечения отрезков MK и NP (ортоцентр треугольника AMN), перпендикулярна прямой MN. ■

Теорема 10.3

Основания перпендикуляров, опущенных на стороны треугольника (или их продолжения) из произвольной точки описанной окружности, лежат на одной прямой.

Эту прямую называют **прямой Симсона**[1].

Доказательство

Пусть P — произвольная точка описанной окружности треугольника ABC. Из точки P опустим перпендикуляры на прямые, содержащие стороны треугольника.

На рисунке 10.7 изображён случай, когда основания двух перпендикуляров (точки E и M) принадлежат сторонам треугольника, а основание третьего перпендикуляра (точка N) принадлежит продолжению стороны треугольника.

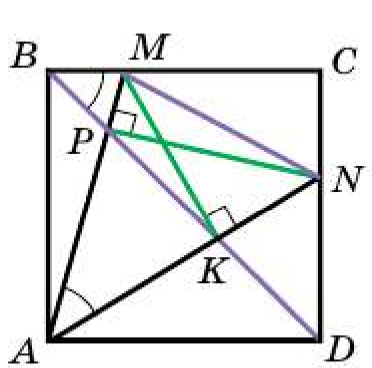


Рис. 10.6

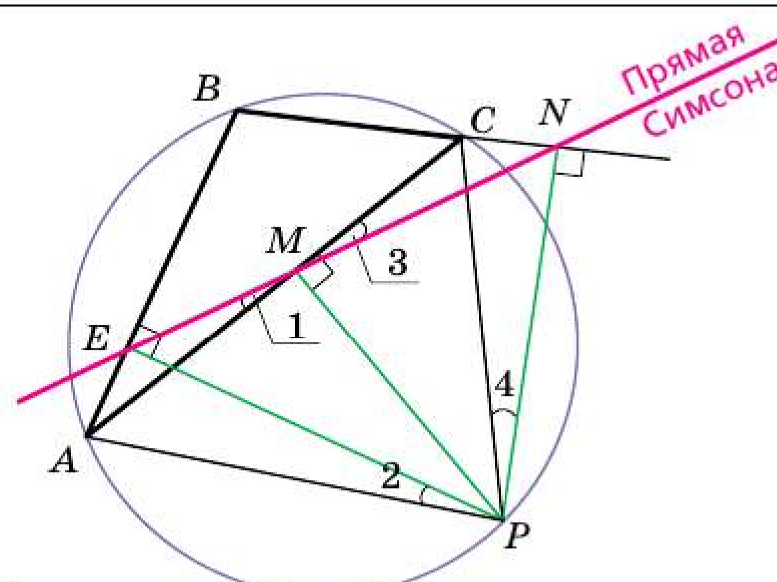


Рис. 10.7

[1] Роберт Симсон (1687—1768) — шотландский математик, профессор. Работал в университете г. Глазго.

Поскольку $\angle AEP = \angle AMP = 90°$, то около четырёхугольника $AEMP$ можно описать окружность (см. ключевую задачу 1 этого параграфа). Отсюда углы 1 и 2 равны как вписанные, опирающиеся на одну и ту же дугу.

Поскольку $\angle PMC + \angle PNC = 180°$, то около четырёхугольника $PMCN$ можно описать окружность. Отсюда углы 3 и 4 равны как вписанные, опирающиеся на одну и ту же дугу.

Поскольку $\angle PEB + \angle BNP = 180°$, то около четырёхугольника $PEBN$ можно описать окружность. Отсюда $\angle 4 + \angle EPC + \angle B = 180°$.

Поскольку четырёхугольник $ABCP$ вписанный, то $\angle 2 + \angle EPC + \angle B = 180°$. Получаем, что $\angle 2 = \angle 4$, а следовательно, $\angle 1 = \angle 3$.

Поскольку угол AMC развёрнутый, то $\angle 1 + \angle EMC = 180°$. Тогда $\angle 3 + \angle EMC = 180°$. А это означает, что угол EMN также развёрнутый, т. е. точки E, M и N лежат на одной прямой.

Заметим, что если точка P и, например, вершина B — концы диаметра, то прямой Симсона является прямая AC (рис. 10.8).

Рисунок 10.9 иллюстрирует случай, когда основания всех трёх перпендикуляров, опущенных из точки P на прямые, содержащие стороны треугольника, не принадлежат сторонам. Для этого случая проведите доказательство самостоятельно. ■

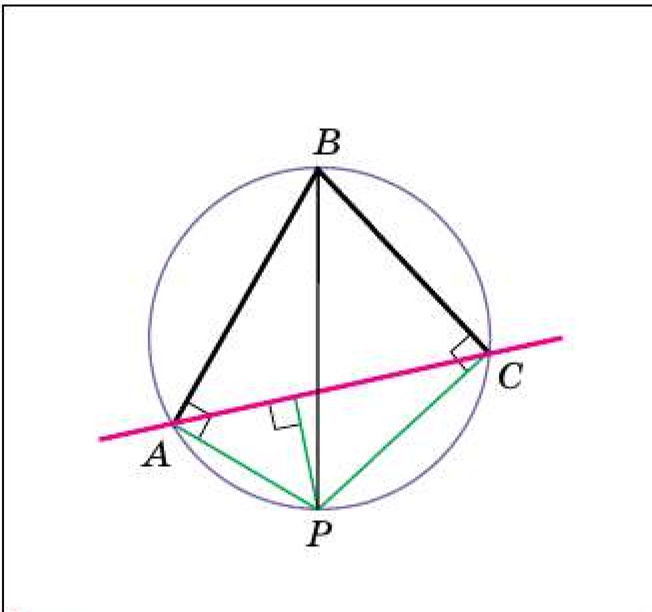


Рис. 10.8

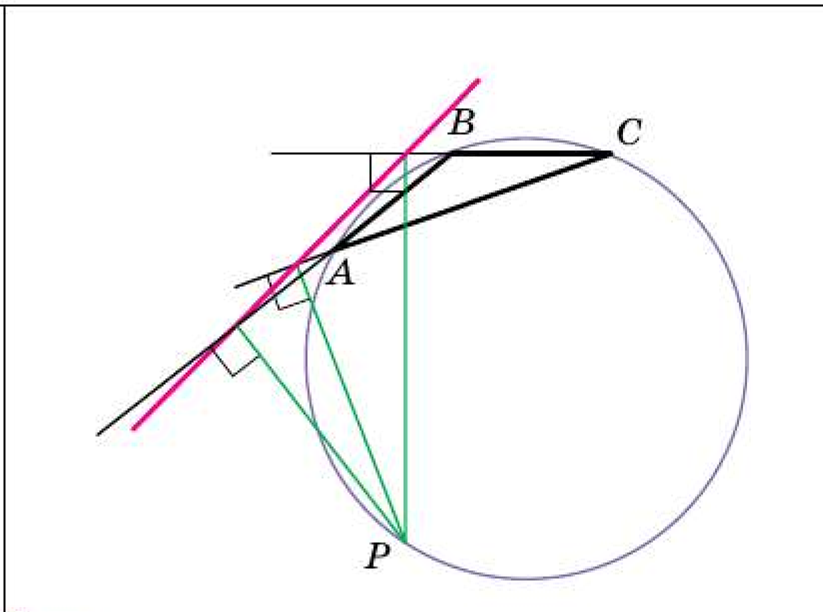


Рис. 10.9

Точки, принадлежащие одной прямой, называют **коллинеарными**. Две точки коллинеарны всегда.

Доказанная теорема предлагает красивый критерий коллинеарности трёх точек.

Справедлива и теорема, обратная теореме 10.3: ***если основания перпендикуляров, опущенных из точки P на прямые, содержа-***

щие стороны треугольника, лежат на одной прямой, то точка P принадлежит описанной окружности данного треугольника.

1. Какой четырёхугольник называют вписанным?
2. В каком случае говорят, что окружность описана около четырёхугольника?
3. Каким свойством обладают углы вписанного четырёхугольника?
4. При каком условии четырёхугольник является вписанным?
5. Какую прямую называют прямой Симсона?
6. Какие точки называют коллинеарными?

Упражнения

10.1. Докажите, что можно описать окружность около:
1) любого прямоугольника;
2) любой равнобокой трапеции.

10.2. Поясните, почему около параллелограмма, не являющегося прямоугольником, нельзя описать окружность.

10.3. В прямоугольнике $ABCD$ $AB = 12$ см, $\angle CAD = 30°$. Найдите радиус окружности, описанной около данного прямоугольника.

10.4. Докажите, что если около ромба можно описать окружность, то этот ромб является квадратом.

10.5. Сторона AD четырёхугольника $ABCD$ является диаметром описанной около него окружности. Известно, что $\angle ABC = 108°$, $\angle BCD = 132°$. Найдите углы BAD, ADC, CAD и BDA.

10.6. Найдите углы четырёхугольника $MNKP$, вписанного в окружность, если $\angle MKP = 58°$, $\angle MPN = 34°$, $\angle KMP = 16°$.

10.7. Равнобокая трапеция вписана в окружность, центр которой принадлежит одному из оснований. Угол между диагоналями трапеции, противолежащий её боковой стороне, равен 56°. Найдите углы трапеции.

10.8. Высоты AA_1 и CC_1 остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке H. Докажите, что: 1) точки H, C_1, B и A_1 лежат на одной окружности; 2) точки A, C_1, A_1 и C лежат на одной окружности.

10.9. Из произвольной точки O, которая принадлежит острому углу A, но не принадлежит его сторонам, опущены перпендикуляры OB и OC на стороны угла. Докажите, что $\angle OAB = \angle OCB$.

10.10. Центр окружности, описанной около трапеции, принадлежит большему основанию, а боковая сторона равна меньшему основанию. Найдите углы трапеции.

10.11. Из точки M, которая принадлежит углу AOB, но не принадлежит его сторонам, опущены перпендикуляры MM_1 и MM_2 на прямые OA и OB. Докажите, что $M_1M_2 \leqslant OM$.

10.12. В треугольнике ABC проведены медианы AA_1 и CC_1. Известно, что $\angle AA_1C = \angle CC_1A$. Докажите, что треугольник ABC равнобедренный.

10.13. Из точки O, принадлежащей остроугольному треугольнику ABC, на стороны AB, BC и CA соответственно опущены перпендикуляры OO_1, OO_2 и OO_3. Докажите, что $\angle AOC = \angle O_3O_1A + \angle O_3O_2C$.

10.14. Найдите геометрическое место оснований перпендикуляров, опущенных из данной точки A на прямые, проходящие через данную точку B.

10.15. В остроугольном треугольнике ABC угол B равен 60°, отрезки AM и CN — его высоты, точка Q — середина стороны AC. Докажите, что треугольник MNQ равносторонний.

10.16. В прямоугольном треугольнике ABC угол A равен 30°. Точка M — середина гипотенузы AB, точка J — центр вписанной окружности треугольника ABC. Найдите угол JMC.

10.17. Вписанная окружность с центром O треугольника ABC касается сторон AB и AC в точках M и N соответственно. Прямая MN пересекает биссектрису угла B в точке P (рис. 10.10). Докажите, что точки N, O, C и P лежат на одной окружности.

10.18. Выпуклый четырёхугольник разрезан прямыми на 25 вписанных четырёхугольников (рис. 10.11). Докажите, что данный четырёхугольник также вписанный.

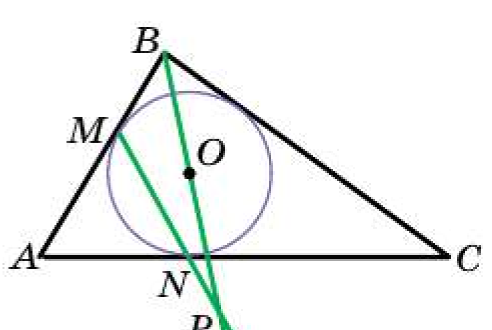


Рис. 10.10

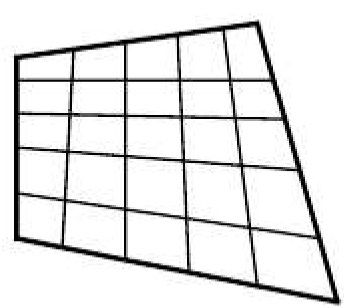


Рис. 10.11

10.19. Две окружности пересекаются в точках P и Q. Через точку A первой окружности проведены прямые AP и AQ, пересекающие вторую окружность в точках B и C соответственно. Докажите, что касательная в точке A к первой окружности параллельна прямой BC.

10.20. В прямоугольник $ABCD$ вписан равносторонний треугольник APK так, что вершина K лежит на стороне BC, а вершина P — на стороне CD. Отрезок KH — высота этого треугольника. Докажите, что треугольник BHC равносторонний.

10.21. В остроугольном треугольнике ABC отрезки CC_1 и AA_1 — высоты. Докажите, что серединный перпендикуляр отрезка C_1A_1 проходит через середину стороны AC.

10.22. В треугольнике ABC отрезки AA_1 и CC_1 — высоты. Постройте треугольник ABC по точкам A_1, C_1 и прямой, содержащей сторону AC.

10.23. Диагональ трапеции, вписанной в окружность, равна d. Боковая сторона видна из центра описанной окружности под углом $120°$. Найдите среднюю линию трапеции.

10.24. Докажите, что высоты AH_1, BH_2 и CH_3 остроугольного треугольника ABC делят пополам углы треугольника $H_1H_2H_3$.

10.25. Равносторонние треугольники ABC и MNP расположены так, что вершина B лежит на стороне MN, а вершина P — на стороне AC (рис. 10.12). Докажите, что $AM \parallel NC$.

10.26. Равные равносторонние треугольники ABC и CDE расположены так, как показано на рисунке 10.13. Точки K, M и L — середины отрезков AC, BD и CE соответственно. Докажите, что треугольник KML равносторонний.

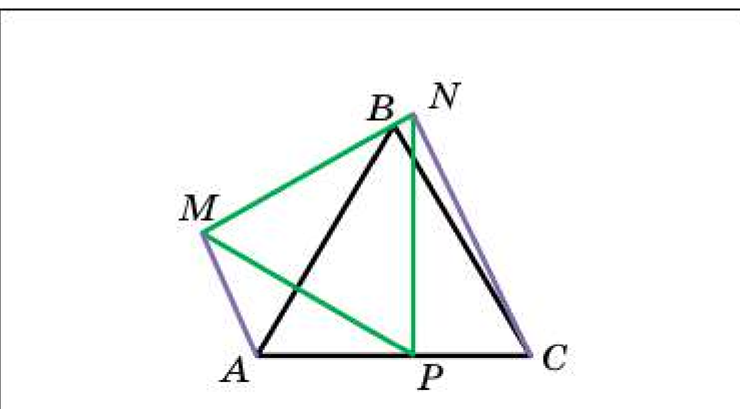


Рис. 10.12

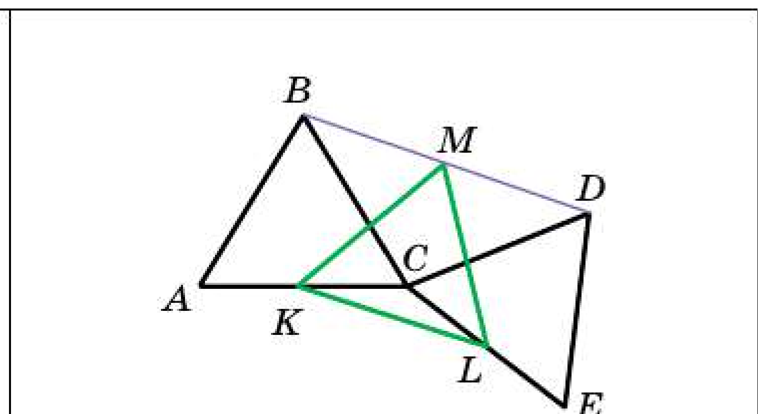


Рис. 10.13

10.27. Из произвольной точки M, которая принадлежит острому углу с вершиной A, но не принадлежит его сторонам, опущены перпендикуляры MP и MQ на стороны угла. Из точки A опущен перпендикуляр AK на отрезок PQ. Докажите, что $\angle PAK = \angle MAQ$.

10.28. В треугольнике ABC ($AC < BC$) проведена медиана CD. Известно, что $\angle DCA + \angle DBC = 90°$. Докажите, что $\angle ACB = 90°$.

10.29. Окружность с центром в точке O, принадлежащей стороне AC остроугольного треугольника ABC, касается сторон AB и BC в точках M и N соответственно. Отрезок BH — высота треугольника ABC. Докажите, что $\angle MHB = \angle BHN$.

10.30. Высоты AA_1 и BB_1 остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке H. Точки X и Y — середины отрезков AB и CH соответственно. Докажите, что $XY \perp A_1B_1$.

10.31. В треугольнике ABC $\angle BAC = 50°$, $\angle BCA = 70°$. На сторонах AB и BC соответственно отметили точки D и F так, что $\angle DCA = \angle FAC = 30°$. Найдите угол CDF.

10.32. Биссектрисы BK и CM треугольника ABC пересекаются в точке O, $\angle A = 60°$. Докажите, что $OK = OM$.

10.33. Биссектрисы MA и KB треугольника MNK пересекаются в точке O, точки A, N, B и O лежат на одной окружности. Найдите угол N.

10.34. Вне прямоугольного треугольника ABC на его гипотенузе AB построен квадрат $ABFD$. Докажите, что $\angle ACO = \angle OCB$, где O — точка пересечения диагоналей квадрата.

10.35. Вершины A и B треугольника ABC с прямым углом C скользят по сторонам прямого угла с вершиной P (рис. 10.14). Докажите, что точка C при этом перемещается по отрезку.

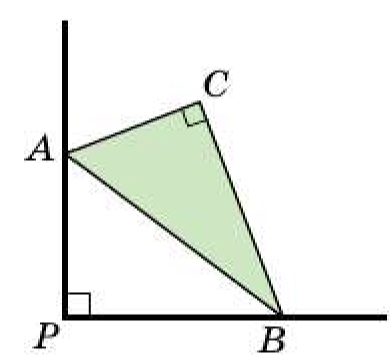


Рис. **10.14**

10.36. В равнобедренном треугольнике ABC угол A равен $100°$. Отрезок BD — биссектриса треугольника. Докажите, что $BD + AD = BC$.

10.37. Диагонали квадрата $ABCD$ пересекаются в точке O. Точки K и M — середины соответственно отрезков BC и OD. Найдите угол AMK.

10.38. Дан квадрат $ABCD$. Точки P и Q лежат соответственно на сторонах AB и BC, причём $BP = BQ$. Пусть точка H — основание перпендикуляра, опущенного из точки B на отрезок PC. Найдите угол DHQ.

10.39. На медиане BM треугольника ABC отметили точку K так, что $\angle MKC = \angle BCM$. Докажите, что $\angle AKM = \angle BAM$.

Определение

Четырёхугольник называют описанным около окружности, если существует окружность, касающаяся всех его сторон.

На рисунке 11.1 изображён описанный четырёхугольник $ABCD$. В этом случае также говорят, что окружность **вписана** в четырёхугольник.

Теорема 11.1

Если четырёхугольник является описанным около окружности, то суммы его противолежащих сторон равны.

Доказательство

Пусть четырёхугольник $ABCD$ описан около окружности (рис. 11.2). Докажем, что $AB + CD = BC + AD$.

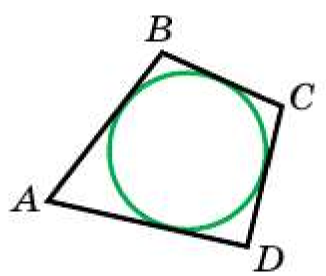


Рис. 11.1

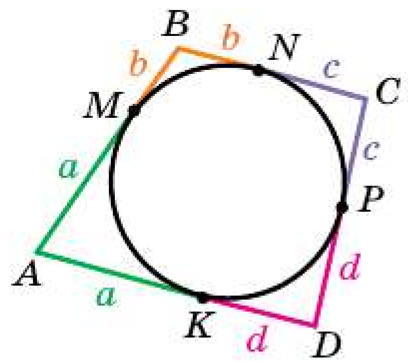


Рис. 11.2

Точки M, N, P и K — точки касания окружности со сторонами четырёхугольника.

Поскольку отрезки касательных, проведённых к окружности через одну точку, равны, то $AK = AM$, $BM = BN$, $CN = CP$, $DP = DK$. Пусть $AK = a$, $BM = b$, $CN = c$, $DP = d$.

Тогда $AB + CD = a + b + c + d$,

$BC + AD = b + c + a + d$.

Следовательно, $AB + CD = BC + AD$. ■

Вы знаете, что в любой треугольник можно вписать окружность. Однако не всякий четырёхугольник обладает таким свойством. Например, нельзя вписать окружность в прямоугольник, отличный от квадрата. Распознавать четырёхугольники, в которые можно вписать окружность, позволяет следующая теорема.

Теорема 11.2

(обратная теореме 11.1)

Если в выпуклом четырёхугольнике суммы противолежащих сторон равны, то этот четырёхугольник является описанным около окружности.

Доказательство

Рассмотрим выпуклый четырёхугольник $ABCD$, в котором $AB + CD = BC + AD$. Докажем, что в него можно вписать окружность.

Пусть биссектрисы углов A и B пересекаются в точке O (рис. 11.3). Тогда точка O равноудалена от сторон AB, BC и AD. Следовательно, существует окружность с центром в точке O, которая касается этих трёх сторон.

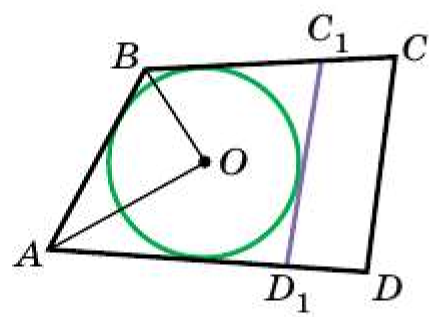


Рис. **11.3**

Предположим, что эта окружность не касается стороны CD. Тогда возможны два случая.

Случай 1. Сторона CD не имеет общих точек с построенной окружностью.

Проведём касательную C_1D_1 параллельно стороне CD (рис. 11.3). Четырёхугольник ABC_1D_1 описанный. Тогда по теореме 11.1 получаем, что

$$AB + C_1D_1 = BC_1 + AD_1. \qquad (1)$$

Однако по условию

$$AB + CD = BC + AD. \qquad (2)$$

Вычтем из равенства (2) равенство (1):

$$CD - C_1D_1 = BC - BC_1 + AD - AD_1.$$

Отсюда имеем: $CD - C_1D_1 = C_1C + D_1D$; $CD = C_1C + D_1D + C_1D_1$.

Это равенство противоречит утверждению, доказанному в ключевой задаче 3 § 1.

Итак, сторона CD должна иметь общие точки с рассматриваемой окружностью.

Случай 2. Сторона CD имеет две общие точки с построенной окружностью.

Рассуждая аналогично, можно показать, что сторона CD не может иметь две общие точки с построенной окружностью. Убедитесь в этом самостоятельно.

Таким образом, предположив, что построенная окружность не касается стороны CD, мы получили противоречие. ■

Теоремы 11.1 и 11.2 можно сформулировать в виде одной теоремы: ***для того чтобы четырёхугольник был описанным около окружности, необходимо и достаточно, чтобы суммы его противолежащих сторон были равны.***

Если четырёхугольник является описанным, то существует точка, равноудалённая от всех его сторон (центр вписанной окружности). Чтобы найти эту точку, достаточно найти точку пересечения биссектрис двух соседних углов четырёхугольника.

Задача 1. На боковых сторонах трапеции, в которую можно вписать окружность, как на диаметрах построены две окружности. Докажите, что эти окружности касаются.

Решение. Пусть O_1 и O_2 — середины боковых сторон AB и CD трапеции $ABCD$ (рис. 11.4). Они являются центрами окружностей, о которых говорится в условии задачи. Тогда сумма радиусов r_1 и r_2 окружностей равна $\frac{AB + CD}{2}$. Поскольку в трапецию можно вписать окружность, то $\frac{AB + CD}{2} = \frac{BC + AD}{2} = O_1O_2$. Получили, что $r_1 + r_2 = O_1O_2$, т. е. сумма радиусов окружностей равна расстоянию между их центрами. А это значит, что окружности касаются. ■

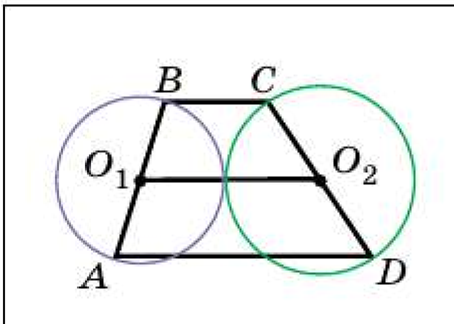


Рис. 11.4

Задача 2. Из точки пересечения диагоналей вписанного четырёхугольника опущены перпендикуляры на его стороны. Докажите, что основания этих перпендикуляров являются вершинами описанного четырёхугольника.

Решение. Пусть O — точка пересечения диагоналей вписанного четырёхугольника $ABCD$ (рис. 11.5), $OM \perp AB$, $ON \perp BC$, $OP \perp CD$, $OQ \perp DA$. Поскольку $\angle AMO + \angle AQO = 180°$, то около четырёхугольника $AMOQ$ можно описать окружность. Отсюда

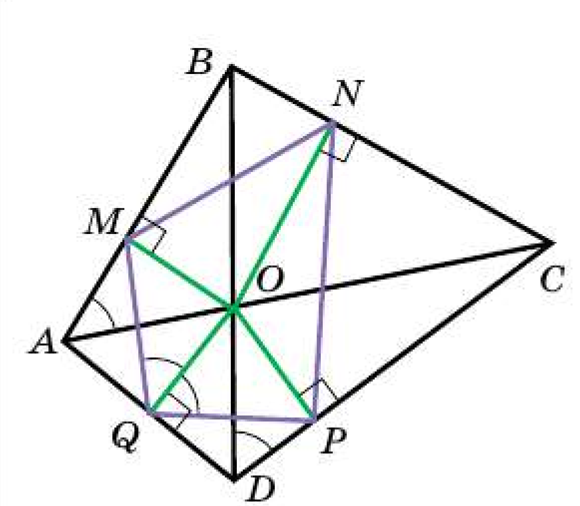


Рис. 11.5

$$\angle MAO = \angle MQO. \quad (3)$$

Аналогично можно доказать, что

$$\angle PDO = \angle PQO. \qquad (4)$$

Но четырёхугольник $ABCD$ является вписанным. Поэтому $\angle BAC = \angle CDB$.

С учётом равенств (3) и (4) получаем, что $\angle MQO = \angle PQO$, т. е. QO — биссектриса угла MQP.

Аналогично можно доказать, что лучи MO, NO и PO являются биссектрисами соответственно углов QMN, MNP и NPQ.

Следовательно, биссектрисы углов четырёхугольника $MNPQ$ пересекаются в одной точке, а это значит, что в четырёхугольник можно вписать окружность. ■

?

1. Какой четырёхугольник называют описанным около окружности?
2. В каком случае говорят, что окружность вписана в четырёхугольник?
3. Каким свойством обладают стороны описанного около окружности четырёхугольника?
4. При каком условии четырёхугольник является описанным около окружности?

Упражнения

11.1. Сумма двух противолежащих сторон четырёхугольника, описанного около окружности, равна 18 см. Найдите периметр данного четырёхугольника.

11.2. Боковая сторона равнобокой трапеции равна 7 см. Чему равен периметр данной трапеции, если в неё можно вписать окружность?

11.3. В четырёхугольнике $CDEF$, в который можно вписать окружность, $CD = 6$ см, $DE = 8$ см, $EF = 12$ см. Найдите сторону CF.

11.4. Докажите, что в любой ромб можно вписать окружность. Какая точка является центром окружности, вписанной в ромб?

11.5. Можно ли вписать окружность в параллелограмм, который не является ромбом?

11.6. Под каким углом видна боковая сторона трапеции из центра вписанной окружности?

11.7. Один из углов ромба равен $60°$, а бóльшая диагональ равна 24 см. Найдите радиус окружности, вписанной в данный ромб.

11.8. Докажите, что если в прямоугольник можно вписать окружность, то этот прямоугольник является квадратом.

11.9. В прямоугольную трапецию вписана окружность. Точка касания делит бóльшую боковую сторону на отрезки длиной 8 см и 50 см.

Найдите периметр данной трапеции, если радиус вписанной окружности равен 20 см.

11.10. В прямоугольную трапецию вписана окружность. Точка касания делит бо́льшую боковую сторону на отрезки длиной 3 см и 12 см. Найдите радиус вписанной окружности, если периметр трапеции равен 54 см.

11.11. Две окружности имеют внешнее касание, прямые AB и CD — их общие касательные, точки A, B, C и D — точки касания (рис. 11.6). Докажите, что в четырёхугольник $ABCD$ можно вписать окружность.

11.12. Центр окружности, вписанной в четырёхугольник, совпадает с точкой пересечения его диагоналей. Докажите, что этот четырёхугольник — ромб.

11.13. Четырёхугольник $ABCD$ описан около окружности с центром O. Докажите, что $\angle AOB + \angle COD = 180°$.

11.14. Окружность пересекает все стороны четырёхугольника $ABCD$ так, что $MN = KE = FP = RT$ (рис. 11.7). Докажите, что в этот четырёхугольник можно вписать окружность.

11.15. Окружности, построенные на боковых сторонах трапеции как на диаметрах, имеют внешнее касание. Докажите, что в эту трапецию можно вписать окружность.

11.16. Четырёхугольник является одновременно вписанным и описанным. Пусть M, N, P и Q — точки касания вписанной окружности со сторонами четырёхугольника (рис. 11.8). Докажите, что $MP \perp NQ$.

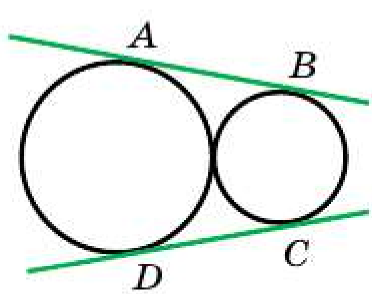


Рис. 11.6

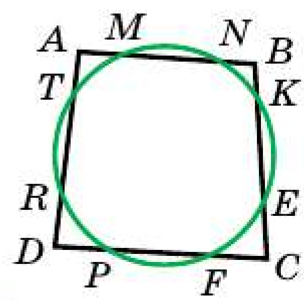


Рис. 11.7

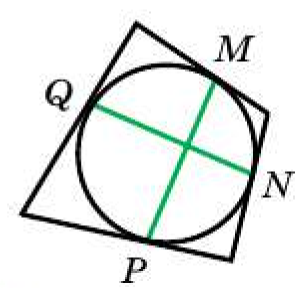


Рис. 11.8

11.17. Дан четырёхугольник $ABCD$. Известно, что окружности, вписанные в треугольники ABC и ACD, касаются. Докажите, что четырёхугольник $ABCD$ — описанный.

11.18. Известно, что четырёхугольник $ABCD$ описанный. Докажите, что окружности, вписанные в треугольники ABC и ACD, касаются.

11.19. Докажите, что отрезки, соединяющие точки касания с вписанной окружностью противолежащих сторон описанного четырёхугольника, равны тогда и только тогда, когда четырёхугольник имеет пару равных противолежащих углов.

11.20. Точка O — центр вписанной окружности треугольника ABC, точка D — середина стороны AB (рис. 11.9). Известно, что $\angle AOD = 90°$. Докажите, что $AB + BC = 3AC$.

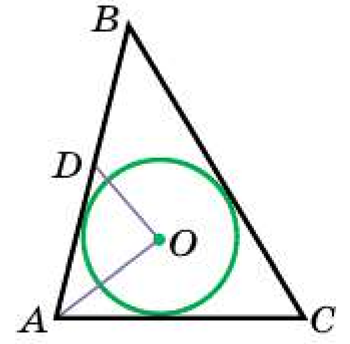


Рис. **11.9**

11.21. Даны точки A, B и C, не лежащие на одной прямой. Найдите точку D такую, чтобы четырёхугольник $ABCD$ был как вписанным, так и описанным.

Центральный угол окружности

Центральным углом окружности называют угол с вершиной в центре окружности.

Вписанный угол окружности

Вписанным углом окружности называют угол, вершина которого лежит на окружности, а стороны пересекают окружность.

Градусная мера вписанного угла окружности

Градусная мера вписанного угла равна половине градусной меры дуги, на которую он опирается.

Свойства вписанных углов

- Вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу, равны.
- Вписанный угол, опирающийся на диаметр (полуокружность), — прямой.

Вписанный четырёхугольник

- Четырёхугольник называют вписанным в окружность, если существует окружность, которой принадлежат все его вершины. В этом случае говорят, что окружность описана около четырёхугольника.
- Для того чтобы четырёхугольник был вписанным в окружность, необходимо и достаточно, чтобы сумма его противолежащих углов была равна 180°.

Прямая Симсона

Основания перпендикуляров, опущенных на стороны треугольника (или их продолжения) из произвольной точки описанной окружности, лежат на одной прямой.

Описанный четырёхугольник

- Четырёхугольник называют описанным около окружности, если существует окружность, касающаяся всех его сторон. В этом случае говорят, что окружность вписана в четырёхугольник.
- Для того чтобы четырёхугольник был описанным около окружности, необходимо и достаточно, чтобы суммы его противолежащих сторон были равны.

глава

3 Подобие треугольников

В этой главе вы ознакомитесь с подобными треугольниками. Научитесь с помощью признаков подобия находить подобные треугольники, применять свойства подобных треугольников при решении задач.

§ 12 Теорема Фалеса. Теорема о пропорциональных отрезках

Теорема 12.1

(теорема Фалеса)

Если параллельные прямые, пересекающие стороны угла, отсекают на одной его стороне равные отрезки, то они отсекают равные отрезки и на другой его стороне.

Доказательство

Пусть дан угол AOB (рис. 12.1). Известно, что $OA_1 = A_1A_2 = A_2A_3 = A_3A_4 = \ldots$, $A_1B_1 \parallel A_2B_2$, $A_2B_2 \parallel A_3B_3$, $A_3B_3 \parallel A_4B_4$, … . Докажем, что $OB_1 = B_1B_2 = B_2B_3 = B_3B_4 = \ldots$.

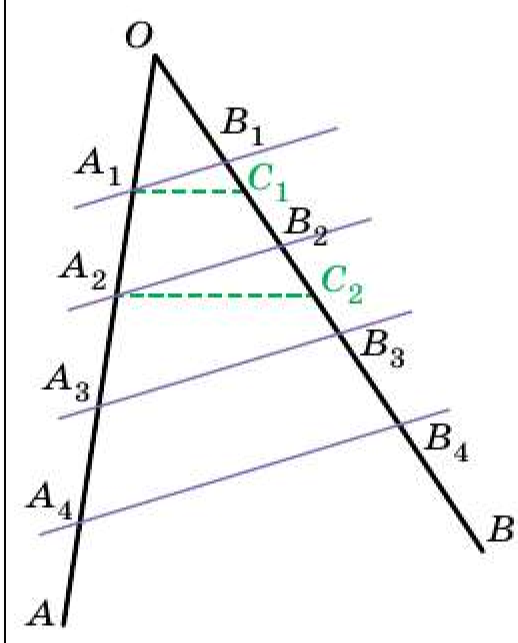


Рис. 12.1

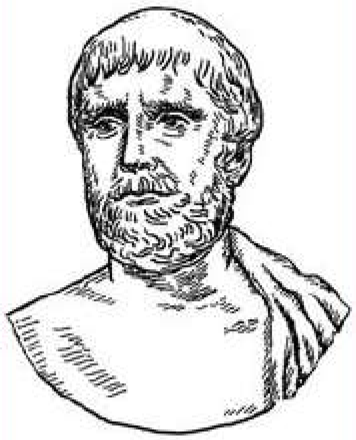
Предположим, что $OB_1 \uparrow B_1B_2$. Пусть серединой отрезка OB_2 является некоторая точка C_1. Тогда отрезок A_1C_1 — средняя линия треугольника A_2OB_2. Отсюда $A_1C_1 \parallel A_2B_2$. Значит, через точку A_1 проходят две прямые, параллельные прямой A_2B_2, что противоречит аксиоме параллельности прямых. Мы получили противоречие. Следовательно, $OB_1 = B_1B_2$.

Предположим, что $B_1B_2 \uparrow B_2B_3$. Пусть серединой отрезка B_1B_3 является некоторая точка C_2. Тогда отрезок A_2C_2 — средняя линия трапеции $A_3A_1B_1B_3$. Отсюда $A_2C_2 \parallel A_3B_3$. Значит, через точку A_2 проходят две прямые, параллельные прямой A_3B_3. Мы пришли к противоречию. Следовательно, $B_1B_2 = B_2B_3$.

Аналогично можно доказать, что $B_2B_3 = B_3B_4$ и т. д. ■

Фалéс Милетский (ок. 625 — ок. 547 до н. э.)

Древнегреческий философ, учёный, купец и государственный деятель. Родом из Милета — порта в Малой Азии на побережье Эгейского моря.
Больше узнать о научном наследии этого великого учёного вы сможете, если примете участие в реализации проекта «Фалес Милетский — великий геометр, строитель, астроном».



Определение

Отношением двух отрезков называют отношение их длин, выраженных в одних и тех же единицах измерения.

Если, например, $AB = 8$ см, $CD = 6$ см, то отношение отрезка AB к отрезку CD равно $\frac{8}{6}$. Записывают: $\frac{AB}{CD} = \frac{8}{6}$, т. е. $\frac{AB}{CD} = \frac{4}{3}$.

Если $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{CD}{C_1D_1}$, то говорят, что отрезки AB и CD **пропорциональны** соответственно отрезкам A_1B_1 и C_1D_1.

Аналогично можно говорить о пропорциональности большего количества отрезков. Например, если $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{CD}{C_1D_1} = \frac{MN}{M_1N_1}$, то говорят, что отрезки AB, CD и MN пропорциональны соответственно отрезкам A_1B_1, C_1D_1 и M_1N_1.

Теорема 12.2

(теорема о пропорциональных отрезках)

Если параллельные прямые пересекают стороны угла, то отрезки, образовавшиеся на одной стороне угла, пропорциональны соответствующим отрезкам, образовавшимся на другой стороне угла.

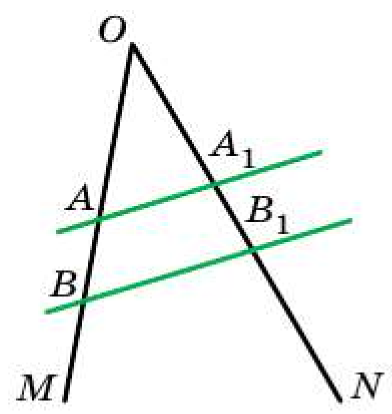


Рис. 12.2

Доказательство

Пусть стороны угла MON пересечены параллельными прямыми AA_1 и BB_1 (рис. 12.2). Докажем, что:

1) $\frac{OA}{OA_1} = \frac{AB}{A_1B_1}$; 2) $\frac{OA}{OA_1} = \frac{OB}{OB_1}$; 3) $\frac{OB}{OB_1} = \frac{AB}{A_1B_1}$.

Докажем первое из этих равенств (остальные два можно доказать аналогично).

Пусть для отрезков OA и AB существует такой отрезок длиной l, который укладывается целое число раз в каждом из них. Имеем: $OA = ml$, $AB = nl$, где m и n — некоторые натуральные числа.

Тогда отрезки OA и AB можно разделить соответственно на m и n равных отрезков, каждый из которых равен l.

Через концы полученных отрезков проведём прямые, параллельные прямой BB_1 (рис. 12.3). По теореме Фалеса эти прямые делят отрезки OA_1 и A_1B_1 соответственно на m и n равных отрезков. Пусть каждый из этих отрезков равен l_1. Отсюда $OA_1 = ml_1$, $A_1B_1 = nl_1$.

Имеем: $\frac{OA}{AB} = \frac{ml}{nl} = \frac{m}{n}$, $\frac{OA_1}{A_1B_1} = \frac{ml_1}{nl_1} = \frac{m}{n}$. Отсюда $\frac{OA}{AB} = \frac{OA_1}{A_1B_1}$. Тогда $\frac{OA}{OA_1} = \frac{AB}{A_1B_1}$.

Заметим, что приведённое доказательство этой теоремы не является полным. Дело в том, что не для любых двух отрезков существует отрезок, который укладывается в каждом из них целое число раз. В частности, для отрезков OA и AB такой отрезок может и не существовать. Проведём доказательство для этого случая.

Докажем, что $\frac{AB}{OA} = \frac{A_1B_1}{OA_1}$ (рис. 12.4).

Предположим, что это равенство неверно. Пусть, например, $\frac{AB}{OA} < \frac{A_1B_1}{OA_1}$. Тогда существует отрезок AB_0 такой, что $AB_0 > AB$ и

$$\frac{AB_0}{OA} = \frac{A_1B_1}{OA_1}. \qquad (*)$$

На луче AB отложим отрезок AB_0 (см. рис. 12.4).

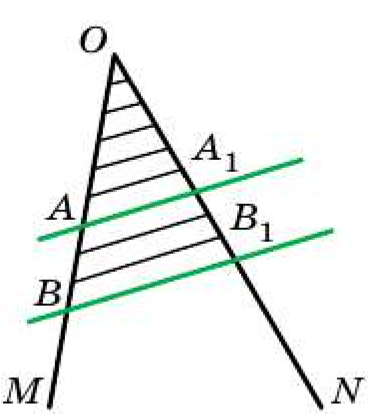


Рис. 12.3

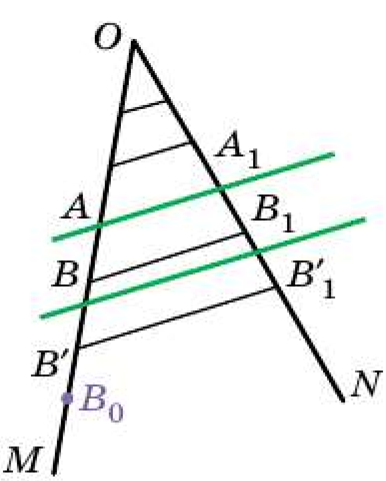


Рис. 12.4

Поделим отрезок OA на равные отрезки такой длины m, что $m < BB_0$. Будем последовательно откладывать отрезки длиной m от точки A до тех пор, пока конец одного из отрезков, точка B', не станет внутренней точкой отрезка BB_0. Такая точка обязательно найдётся, так как длина откладываемого отрезка меньше, чем BB_0.

Через концы полученных отрезков проведём прямые, параллельные прямой AA_1. Пусть прямая, проходящая через точку B', пересекает луч ON в точке B_1' (см. рис. 12.4).

Получили, что для отрезков OA_1 и A_1B_1' существует отрезок, который укладывается в каждом из них целое число раз. Поэтому выполняется равенство $\frac{AB'}{OA} = \frac{A_1B_1'}{OA_1}$.

Поскольку $AB_0 > AB'$ и $A_1B_1' > A_1B_1$, то $\frac{AB_0}{OA} > \frac{AB'}{OA} = \frac{A_1B_1'}{OA_1} > \frac{A_1B_1}{OA_1}$, т. е. $\frac{AB_0}{OA} > \frac{A_1B_1}{OA_1}$, что противоречит равенству (*). ■

Если рисунок 12.2 дополнить прямой CC_1, параллельной прямой BB_1 (рис. 12.5), то, рассуждая аналогично, получим, например, что $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1}$.

Если в формулировке теоремы 12.2 вместо сторон угла взять две произвольные прямые, то получим верное утверждение.

Задача 1. Разделите данный отрезок на три равных отрезка.

Решение. Через конец A данного отрезка AB проведём луч AC, не принадлежащий прямой AB (рис. 12.6). Отметим на луче AC произвольную точку A_1. Затем отметим точки A_2 и A_3 так, чтобы $AA_1 = A_1A_2 = A_2A_3$. Проведём отрезок A_3B. Через точки A_1 и A_2 проведём прямые, параллельные прямой A_3B. Они пересекут отре-

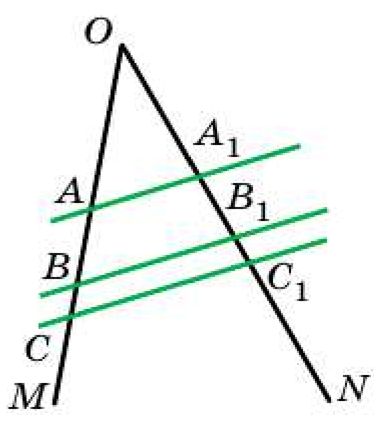


Рис. 12.5

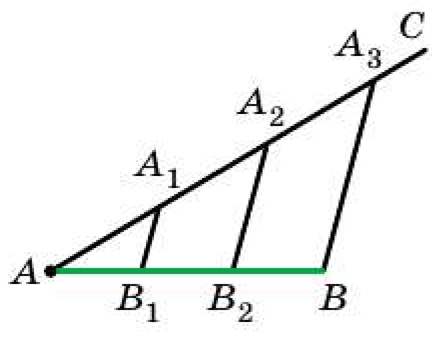


Рис. 12.6

зок AB в точках B_1 и B_2 соответственно. По теореме Фалеса $AB_1 = B_1B_2 = B_2B$. ■

Задача 2. На стороне BC треугольника ABC выбрана точка N так, что $BN : NC = 2 : 3$. В каком отношении медиана BM делит отрезок AN?

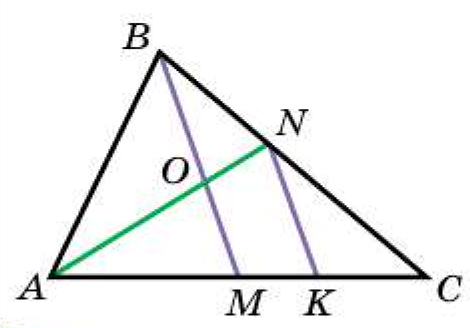


Рис. 12.7

Решение. Через точку N проведём прямую NK, параллельную медиане BM, точка K принадлежит стороне AC (рис. 12.7). Имеем: $\frac{MK}{KC} = \frac{BN}{NC} = \frac{2}{3}$; $MK = \frac{2}{3}KC$. Отсюда $MK = \frac{2}{5}MC$. Поскольку $MC = MA$, то $MK = \frac{2}{5}AM$, т. е. $\frac{AM}{MK} = \frac{5}{2}$. Получаем: $\frac{AO}{ON} = \frac{AM}{MK} = \frac{5}{2}$.

Ответ: $\frac{5}{2}$. ■

?

1. Сформулируйте теорему Фалеса.

2. Что называют отношением двух отрезков?

3. В каком случае говорят, что отрезки AB и CD пропорциональны отрезкам A_1B_1 и C_1D_1?

4. Сформулируйте теорему о пропорциональных отрезках.

Упражнения

12.1. На рисунке 12.8 $BD \parallel CE$, $AB = 16$ см, $BC = 6$ см, $AD = 8$ см. Найдите отрезок DE.

12.2. На рисунке 12.9 $A_1B_1 \parallel A_2B_2 \parallel A_3B_3$, $A_1A_2 = 9$ см, $A_2A_3 = 15$ см, $B_1B_2 = 6$ см. Найдите отрезок B_2B_3.

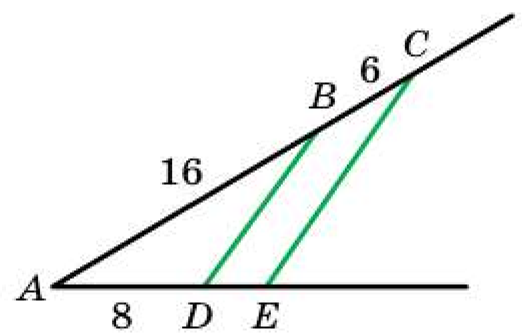


Рис. 12.8

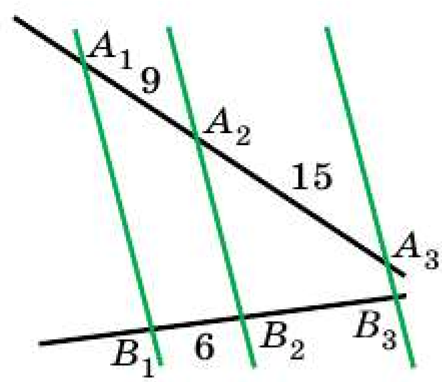


Рис. 12.9

12.3. На рисунке 12.10 $DE \parallel AC$, $BE = 10$ см, отрезок BD в 2 раза больше отрезка AD. Найдите отрезок BC.

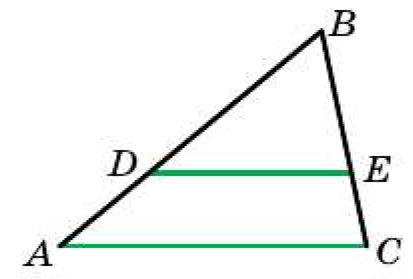


Рис. **12.10**

12.4. Прямая, параллельная стороне BC треугольника ABC, пересекает его сторону AB в точке M, а сторону AC — в точке K. Известно, что $AM = 9$ см, $BM = 6$ см, $KC = 8$ см. Найдите отрезок AK.

12.5. Докажите, что средняя линия треугольника ABC, параллельная стороне AC, делит пополам любой отрезок, соединяющий вершину B с произвольной точкой стороны AC.

12.6. Расстояние от середины хорды BC до диаметра AC равно 3 см, $\angle BAC = 30°$. Найдите хорду AB.

12.7. Отрезок BM — высота ромба $ABCD$, проведённая к стороне AD. Известно, что $\angle A = 45°$, $AM = 8$ см. Найдите расстояние от точки пересечения диагоналей ромба до стороны AD.

12.8. В треугольнике ABC $AB = BC$, $AC = 8$ см, отрезок AD — медиана, отрезок BE — высота, $BE = 12$ см. Из точки D опущен перпендикуляр DF на сторону AC. Найдите отрезок DF и угол ADF.

12.9. Сторона AC треугольника ABC равна 24 см. Сторону AB разделили на четыре равных отрезка и через точки деления провели прямые, параллельные стороне AC. Найдите отрезки этих прямых, принадлежащие треугольнику.

12.10. Основания трапеции равны 16 см и 28 см. Одну из боковых сторон разделили на три равных отрезка и через точки деления провели прямые, параллельные основаниям. Найдите отрезки этих прямых, принадлежащие трапеции.

12.11. Докажите, что средняя линия трапеции делит её диагонали пополам.

12.12. Средняя линия MK трапеции $ABCD$ пересекает диагональ AC в точке E. Известно, что $ME = 4$ см, $EK = 6$ см. Найдите основания трапеции.

12.13. Диагонали трапеции пересекают её среднюю линию MK в точках E и F. Докажите, что $ME = KF$.

12.14. Докажите, что отрезок, соединяющий середины диагоналей трапеции, параллелен её основаниям и равен половине их разности.

12.15. Основания трапеции равны 12 см и 22 см. Найдите отрезки, на которые диагонали трапеции делят её среднюю линию.

12.16. Докажите, что точка пересечения биссектрис углов, прилежащих к боковой стороне трапеции, принадлежит прямой, содержащей её среднюю линию.

12.17. Точка D — середина стороны AC треугольника ABC. На стороне AB отметили точку M так, что $AM : MB = 2 : 7$. В каком отношении прямая BD делит отрезок CM?

12.18. В равнобедренном треугольнике DEF провели высоту EC к его основанию и на боковой стороне EF отметили точку A. Отрезки EC и DA пересекаются в точке O, причём $AO : OD = 3 : 8$. Найдите отношение $EA : AF$.

12.19. На стороне BC треугольника ABC отметили точку M так, что $BM : MC = 3 : 10$. В каком отношении отрезок AM делит медиану BK треугольника ABC?

12.20. На стороне AB треугольника ABC отметили точку M так, что $AM : MB = 4 : 3$. В каком отношении медиана BK: 1) делит отрезок CM; 2) делится отрезком CM?

12.21. В треугольнике ABC отрезок AK (точка K принадлежит стороне BC) делит медиану BM в отношении $3 : 4$, считая от вершины B. В каком отношении точка K делит сторону BC?

◆ ◆ ◆

12.22. Даны отрезки a, b и c. Постройте отрезок x такой, что $a : x = b : c$.

12.23. Через точку O, принадлежащую данному углу, проведите отрезок, концы которого принадлежат сторонам данного угла и который делится точкой O: 1) пополам; 2) в отношении $2 : 3$.

12.24. Точки A и B лежат в разных полуплоскостях относительно прямой l и удалены от неё на 6 см и 8 см соответственно. Найдите расстояние от середины отрезка AB до прямой l.

12.25. На сторонах угла A отметили точки B_1, B_2, C_1 и C_2 так, что $\frac{AB_1}{B_1B_2} = \frac{AC_1}{C_1C_2}$ (рис. 12.11). Докажите, что $B_1C_1 \parallel B_2C_2$.

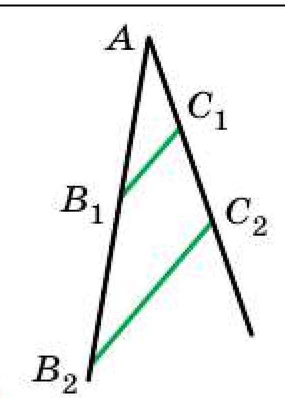


Рис. 12.11

12.26. Высота BK ромба $ABCD$, проведённая к стороне AD, пересекает диагональ AC в точке M. Найдите отрезок MD, если известно, что $BK = 4$ см, $AK : KD = 1 : 2$.

12.27. В равнобедренном треугольнике ABC ($AC = CB$) проведены медиана CC_1 и биссектриса AA_1. Найдите угол ACB, если $AA_1 = 2CC_1$.

12.28. Точки M и P — середины соответственно сторон AD и DC параллелограмма $ABCD$. Отрезки MC и BP пересекаются в точке K. Найдите отношение $BK : KP$.

12.29. Через вершину B параллелограмма $ABCD$ проведена прямая, не имеющая с параллелограммом других общих точек. Вершины A и C удалены от этой прямой на расстояния a и b соответственно. Найдите расстояние от точки D до этой прямой.

12.30. В остроугольном треугольнике ABC отрезки CC_1 и AA_1 — высоты. Из точек A и C на прямую A_1C_1 опущены перпендикуляры AF и CK. Докажите, что $FC_1 = KA_1$.

12.31. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ противолежащие углы A и C — прямые. На диагональ AC опущены перпендикуляры BE и DF. Докажите, что $CE = FA$.

§ 13 Теорема о медианах треугольника. Теорема о биссектрисе треугольника

Теорема 13.1

Все три медианы треугольника пересекаются в одной точке, которая делит каждую из них в отношении 2 : 1, считая от вершины треугольника.

Доказательство

На рисунке 13.1 медианы AA_1 и BB_1 треугольника ABC пересекаются в точке M. Докажем, что медиана CC_1 также проходит через точку M и $\frac{BM}{MB_1} = \frac{AM}{MA_1} = \frac{CM}{MC_1} = \frac{2}{1}$.

Проведём $B_1K \parallel AA_1$.

Поскольку $AB_1 = B_1C$, то по теореме Фалеса $A_1K = KC$, т. е. $\frac{A_1C}{A_1K} = \frac{2}{1}$. Поскольку $BA_1 = A_1C$, то $\frac{BA_1}{A_1K} = \frac{2}{1}$. По теореме о пропорциональных отрезках $\frac{BM}{MB_1} = \frac{BA_1}{A_1K} = \frac{2}{1}$.

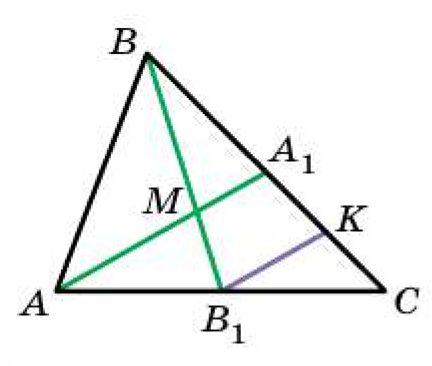


Рис. 13.1

Таким образом, медиана AA_1 пересекает медиану BB_1 и делит её в отношении 2 : 1, считая от вершины B.

Аналогично можно доказать (сделайте это самостоятельно), что медиана CC_1 также делит медиану BB_1 в отношении 2 : 1, считая от вершины B (рис. 13.2).

А это означает, что все три медианы треугольника ABC проходят через одну точку. Эта точка делит медиану BB_1 в отношении 2 : 1. Аналогично можно доказать, что эта точка делит в отношении 2 : 1 также медианы AA_1 и CC_1. ■

На рисунке 13.3 изображён треугольник ABC. Точка D принадлежит стороне AC. В этом случае говорят, что стороны AB и BC **прилежат** соответственно к отрезкам AD и DC.

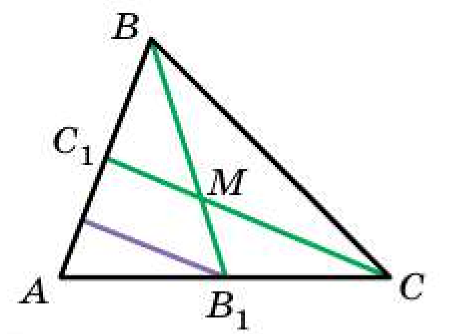


Рис. 13.2

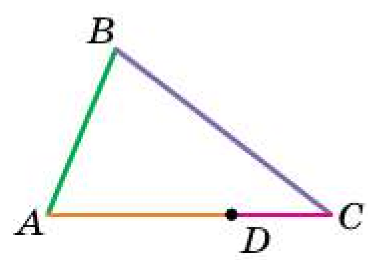


Рис. 13.3

Теорема 13.2

(свойство биссектрисы треугольника)

Биссектриса треугольника делит сторону, к которой она проведена, на отрезки, пропорциональные прилежащим к ним сторонам.

Доказательство

На рисунке 13.4 отрезок BD — биссектриса треугольника ABC. Докажем, что $\frac{AD}{AB} = \frac{DC}{BC}$.

Через точку C проведём прямую CE, параллельную прямой BD. Пусть проведённая прямая пересекает прямую AB в точке E. Углы 1 и 2 равны как накрест лежащие при параллельных прямых BD и CE и секущей BC; углы 3 и 4 равны как соответственные при параллельных прямых BD и CE и секущей AE. Поскольку отрезок BD — биссектриса треугольника ABC, то $\angle 4 = \angle 1$. Из сказанного следует, что $\angle 2 = \angle 3$. Тогда треугольник CBE — равнобедренный с равными сторонами BC и BE. По теореме о пропорциональных отрезках $\frac{AD}{AB} = \frac{DC}{BE}$. Поскольку $BE = BC$, то $\frac{AD}{AB} = \frac{DC}{BC}$. ■

Справедлива теорема, обратная теореме 13.2.

Теорема 13.3

Если на стороне AC треугольника ABC выбрана точка D так, что $\frac{AD}{AB} = \frac{DC}{BC}$, то отрезок BD — биссектриса треугольника ABC.

Воспользовавшись методом доказательства от противного, докажите эту теорему самостоятельно.

Задача 1 (свойство биссектрисы внешнего угла треугольника). Биссектриса внешнего угла при вершине B треугольника ABC пересекает луч AC в точке D. Докажите, что $\frac{AD}{AB} = \frac{DC}{BC}$.

Указание. Проведите через точку C прямую CE, параллельную прямой BD (рис. 13.5). Завершите доказательство самостоятельно.

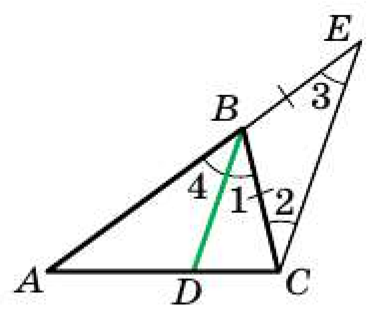


Рис. 13.4

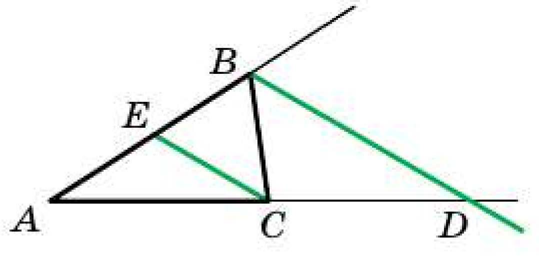


Рис. 13.5

Заметим, что справедливо свойство, обратное свойству биссектрисы внешнего угла треугольника:

если на продолжении стороны AC треугольника ABC выбрана точка D так, что $\frac{AD}{AB} = \frac{DC}{BC}$, то луч BD — биссектриса внешнего угла треугольника при вершине B.

Докажите это свойство самостоятельно.

Задача 2. Пусть даны точки A и C. Докажите, что множество точек X таких, что $\frac{AX}{XC} = k$, где k — заданное положительное число, отличное от 1, принадлежит одной окружности.

Решение. Для каждого $k > 0$ и $k \neq 1$ на прямой AC существуют две точки D_1 и D_2 такие, что $\frac{AD_1}{D_1C} = \frac{AD_2}{D_2C} = k$, причём точка D_1 принадлежит отрезку AC, а точка D_2 не принадлежит этому отрезку.

Пусть точка M не принадлежит прямой AC и $\frac{AM}{MC} = k$ (рис. 13.6). Тогда отрезок MD_1 — биссектриса треугольника AMC, луч MD_2 — биссектриса внешнего угла при вершине M треугольника AMC. Поскольку $\angle D_1MD_2$ — угол между биссектрисами смежных углов, то $\angle D_1MD_2 = 90°$. Следовательно, точка M принадлежит окружности с диаметром D_1D_2. ■

В § 15 будет доказано, что каждая точка X указанной окружности обладает таким свойством: $\frac{AX}{XC} = k$. Эту окружность называют **окружностью Аполлония**.

Аполлоний Пергский (III в. до н. э.)

Древнегреческий математик. Его труды оказали значительное влияние на развитие астрономии, механики, оптики.

Задача 3. Постройте треугольник по трём его медианам.

Решение. На рисунке 13.7 отрезки AA_1, BB_1 и CC_1 — медианы треугольника ABC, которые пересекаются в точке M.

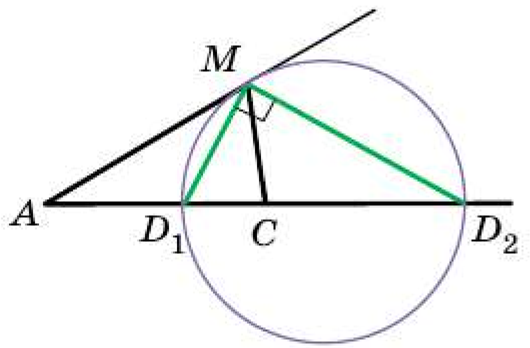


Рис. 13.6

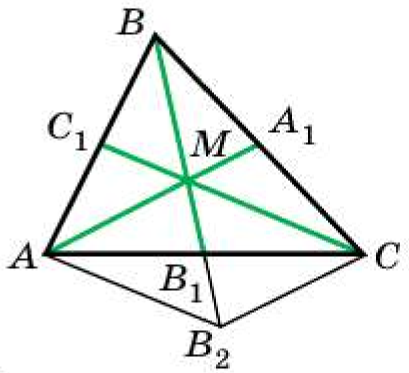


Рис. 13.7

На луче MB_1 отметим точку B_2 такую, что $MB_1 = B_1B_2$.

В четырёхугольнике $AMCB_2$ диагонали точкой пересечения делятся пополам, следовательно, этот четырёхугольник является параллелограммом. Отсюда $CB_2 = AM$.

Поскольку $MB_1 = \frac{1}{2}BM$, то $MB_2 = BM$. Для треугольника MCB_2 получаем: $CB_2 = AM = \frac{2}{3}AA_1$, $B_2M = \frac{2}{3}BB_1$, $MC = \frac{2}{3}CC_1$. Следовательно, треугольник MCB_2 можно построить по трём сторонам.

Завершите решение самостоятельно. ■

1. Сформулируйте теорему о медианах треугольника.
2. Сформулируйте свойство биссектрисы треугольника.
3. Сформулируйте свойство биссектрисы внешнего угла треугольника.

Упражнения

13.1. Высота равностороннего треугольника равна 12 см. На каком расстоянии от сторон треугольника находится точка пересечения его биссектрис?

13.2. Медиана CD треугольника ABC равна 9 см. Найдите отрезки CO и OD, где O — точка пересечения медиан треугольника ABC.

13.3. Отрезок BD является биссектрисой треугольника ABC. Известно, что $AB = 40$ см, $AD = 30$ см, $CD = 12$ см. Найдите сторону BC.

13.4. Отрезок AM — биссектриса треугольника ABC. Известно, что $AB = 48$ см, $AC = 32$ см, $BM = 18$ см. Найдите сторону BC.

13.5. Отрезок BD — биссектриса треугольника ABC. Известно, что $AB = 28$ см, $BC = 20$ см, $AC = 36$ см. Найдите отрезки AD и CD.

13.6. В треугольник ABC вписан ромб $CDEF$ так, что угол C у них общий, а вершины D, E и F ромба принадлежат соответственно сторонам AC, AB и BC треугольника. Найдите стороны AC и BC, если $AE = 30$ см, $BE = 12$ см, а периметр треугольника равен 105 см.

13.7. Стороны треугольника равны 39 см, 65 см и 80 см. Окружность, центр которой принадлежит большей стороне треугольника, касается двух других его сторон. На какие отрезки центр этой окружности делит сторону треугольника?

13.8. Точки M и K — середины сторон AB и AD параллелограмма $ABCD$ соответственно. Докажите, что точка пересечения прямых BK и DM принадлежит диагонали AC.

13.9. Точки M и N — середины сторон BC и CD параллелограмма $ABCD$ соответственно. Докажите, что отрезки AM и AN делят диагональ BD на три равные части.

13.10. Докажите, что если две медианы треугольника равны, то этот треугольник равнобедренный.

13.11. В треугольнике ABC ($AB = BC$) проведены медиана AM и высота BH. Найдите высоту BH, если $AM = 45$ см, $\angle CAM = 30°$.

13.12. Даны отрезок AB и точка O, не принадлежащая прямой AB. Постройте треугольник, для которого отрезок AB является стороной, а точка O — точкой пересечения медиан.

13.13. В равнобедренном треугольнике высота, проведённая к основанию, равна 42 см, а основание относится к боковой стороне как 6 : 11. Найдите радиус окружности, вписанной в данный треугольник.

13.14. Боковая сторона равнобедренного треугольника равна 60 см, а центр вписанной окружности делит медиану, проведённую к основанию, в отношении 12 : 5. Найдите основание треугольника.

13.15. В треугольнике ABC медианы, проведённые из вершин A и C, перпендикулярны. Найдите отношение медианы BM к стороне AC.

13.16. Точки M и N — середины сторон BC и CD параллелограмма $ABCD$. Докажите, что если $DM \perp AC$, то $BN : CD = 3 : 2$.

13.17. Точка D — середина стороны AC треугольника ABC, отрезки DE и DF — биссектрисы треугольников ABD и CBD соответственно. Докажите, что $EF \parallel AC$.

13.18. Постройте треугольник:

1) по стороне и углам, которые эта сторона образует с медианами, проведёнными к двум другим сторонам;

2) по двум медианам и углу между ними;

3) по высоте и медиане, проведённым к одной стороне, и углу между этой стороной и медианой, проведённой к другой стороне.

13.19. Постройте треугольник:

1) по стороне и медианам, проведённым к двум другим сторонам;

2) по высоте, проведённой к одной из сторон, и медианам, проведённым к двум другим сторонам.

13.20. Точки K, L, M и N — соответственно середины сторон AB, BC, CD и DA четырёхугольника $ABCD$. Прямые AL и CK пересекаются в точке P, прямые AM и CN пересекаются в точке Q. Докажите, что если четырёхугольник $APCQ$ — параллелограмм, то четырёхугольник $ABCD$ также является параллелограммом.

13.21. В окружность вписан квадрат $ABCD$. Хорда AE пересекает сторону CD в точке M, а хорда BE — в точке K. Докажите, что $DM : MK = DE : EK$.

13.22. В окружность вписан равносторонний треугольник ABC. Хорда AP пересекает медиану BD в точке K так, что $BK : KD = 1 : 6$. Найдите отношение $BP : PC$.

13.23. Докажите, что если m_1, m_2 и m_3 — длины медиан треугольника, p — его полупериметр, то $m_1 + m_2 + m_3 > \frac{3}{2}p$.

13.24. Постройте треугольник по углу, медиане, выходящей из вершины этого угла, и другой медиане.

§ 14 Подобные треугольники

На рисунке 14.1 вы видите уменьшенное изображение обложки учебника по геометрии. Вообще в повседневной жизни часто встречаются объекты, имеющие одинаковую форму, но разные размеры (рис. 14.2).

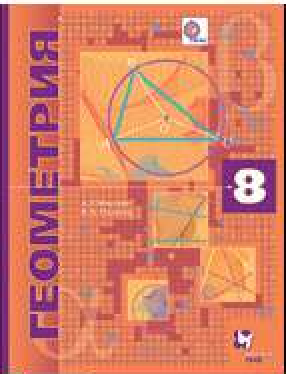


Рис. **14.1**

Рис. **14.2**

Геометрические фигуры, которые имеют одинаковую форму, называют **подобными**. Например, подобными являются любые две окружности, два квадрата, два равносторонних треугольника (рис. 14.3).

На рисунке 14.4 изображены треугольники ABC и $A_1B_1C_1$, у которых равны углы: $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, $\angle C = \angle C_1$.

Стороны AB и A_1B_1 лежат против равных углов C и C_1. Такие стороны называют **соответственными**. Соответственными также являются стороны BC и B_1C_1, CA и C_1A_1.

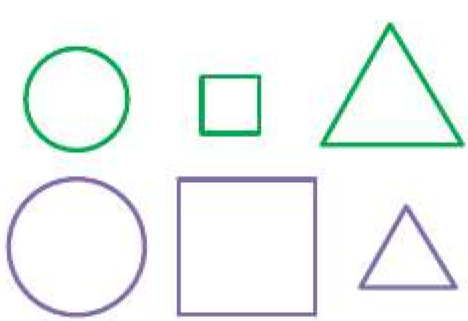


Рис. **14.3**

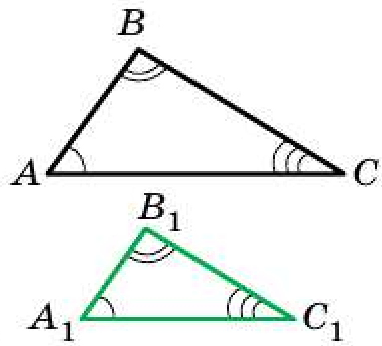


Рис. **14.4**

Определение

Два треугольника называют подобными, если их углы соответственно равны и стороны одного треугольника пропорциональны соответственным сторонам другого треугольника.

Например, на рисунке 14.5 изображены треугольники ABC и $A_1B_1C_1$, у которых $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, $\angle C = \angle C_1$ и $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{CA}{C_1A_1} = 2$. По определению эти треугольники подобны. Пишут: $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$ (читают: «треугольник ABC подобен треугольнику $A_1B_1C_1$»).

Число 2, которому равно отношение соответственных сторон, называют **коэффициентом подобия**. Говорят, что треугольник ABC подобен треугольнику $A_1B_1C_1$ с коэффициентом подобия, равным 2. Пишут: $\triangle ABC \overset{2}{\sim} \triangle A_1B_1C_1$.

Поскольку $\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{B_1C_1}{BC} = \frac{C_1A_1}{CA} = \frac{1}{2}$, то можно также сказать, что треугольник $A_1B_1C_1$ подобен треугольнику ABC с коэффициентом подобия $\frac{1}{2}$. Пишут: $\triangle A_1B_1C_1 \overset{\frac{1}{2}}{\sim} \triangle ABC$.

Из определения равных треугольников следует, что любые два равных треугольника подобны с коэффициентом подобия, равным 1.

Если $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$ и $\triangle A_1B_1C_1 \sim \triangle A_2B_2C_2$, то $\triangle ABC \sim \triangle A_2B_2C_2$. Докажите это свойство самостоятельно.

Лемма[1] о подобных треугольниках

Прямая, параллельная стороне треугольника и пересекающая две другие его стороны, отсекает от данного треугольника ему подобный.

Доказательство

На рисунке 14.6 изображён треугольник ABC, отрезок A_1C_1 параллелен стороне AC. Докажем, что $\triangle A_1BC_1 \sim \triangle ABC$.

Углы A и A_1, C и C_1 равны как соответственные при параллельных прямых A_1C_1 и AC и секущих AB и CB соответственно. Следовательно, углы рассматриваемых треугольников соответственно равны.

---

[1] **Леммой** называют вспомогательную теорему, которую используют для доказательства других теорем.

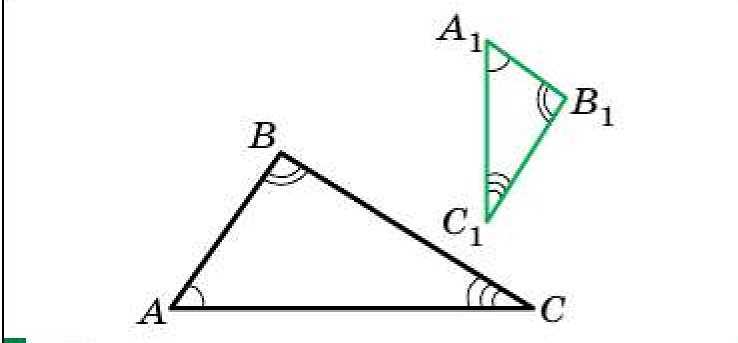


Рис. 14.5

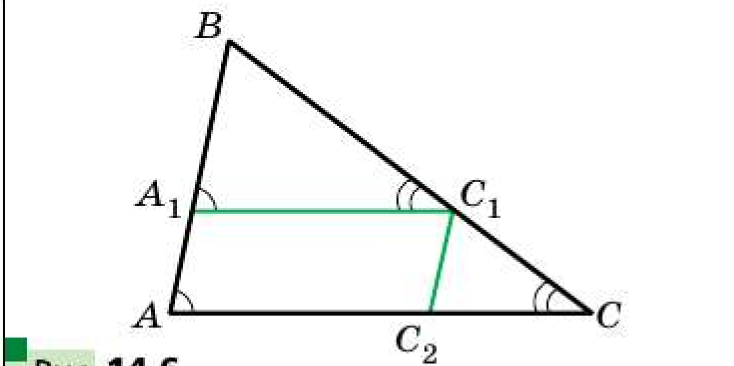


Рис. 14.6

Покажем, что стороны BA и BC пропорциональны соответственно сторонам BA_1 и BC_1.

Из теоремы о пропорциональных отрезках (теорема 12.2) следует, что $\frac{BA}{BC} = \frac{BA_1}{BC_1}$. Отсюда $\frac{BA}{BA_1} = \frac{BC}{BC_1}$.

Проведём $C_1C_2 \parallel AB$. Получаем: $\frac{BC}{BC_1} = \frac{AC}{AC_2}$. По определению четырёхугольник $AA_1C_1C_2$ — параллелограмм. Тогда $AC_2 = A_1C_1$. Отсюда $\frac{BC}{BC_1} = \frac{AC}{A_1C_1}$.

Таким образом, мы доказали, что $\frac{BA}{BA_1} = \frac{BC}{BC_1} = \frac{AC}{A_1C_1}$.

Следовательно, в треугольниках A_1BC_1 и ABC углы соответственно равны и соответственные стороны пропорциональны. Поэтому по определению эти треугольники подобны. ■

Задача. Докажите, что отношение периметров подобных треугольников равно коэффициенту подобия.

Решение. Пусть треугольник $A_1B_1C_1$ подобен треугольнику ABC с коэффициентом подобия k. Тогда $\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{B_1C_1}{BC} = \frac{A_1C_1}{AC} = k$, откуда $A_1B_1 = k \cdot AB$, $B_1C_1 = k \cdot BC$, $A_1C_1 = k \cdot AC$.

Пусть P_1 — периметр треугольника $A_1B_1C_1$, P — периметр треугольника ABC. Имеем:

$$P_1 = A_1B_1 + B_1C_1 + A_1C_1 = k \cdot AB + k \cdot BC + k \cdot AC =$$
$$= k(AB + BC + AC) = kP, \text{ тогда } \frac{P_1}{P} = k. \ ■$$

?

1. Какие два треугольника называют подобными?
2. Чему равен коэффициент подобия двух равных треугольников?
3. Сформулируйте лемму о подобных треугольниках.

Упражнения

14.1. На рисунке 14.7 изображены подобные треугольники ABC и DEF, равные углы которых отметили одинаковым количеством дуг. Какие стороны этих треугольников пропорциональны? Запишите соответствующие равенства.

14.2. Известно, что $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$, причём $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, $AB = 6$ см, $BC = 7$ см, $AC = 10$ см, $A_1B_1 = 9$ см. Найдите стороны B_1C_1 и A_1C_1.

14.3. Стороны MK и DE и KT и EF — соответственные стороны подобных треугольников MKT и DEF. Известно, что $MK = 18$ см, $KT = 16$ см, $MT = 28$ см, $MK : DE = 4 : 5$. Найдите стороны треугольника DEF.

14.4. На рисунке 14.8 $AB \parallel CD$. Найдите на этом рисунке подобные треугольники. Запишите пропорции, начинающиеся с отношения: 1) $\frac{AE}{CE}$; 2) $\frac{CD}{AB}$; 3) $\frac{AB}{AE}$.

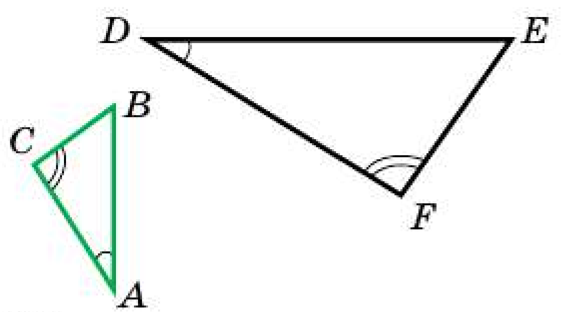


Рис. **14.7**

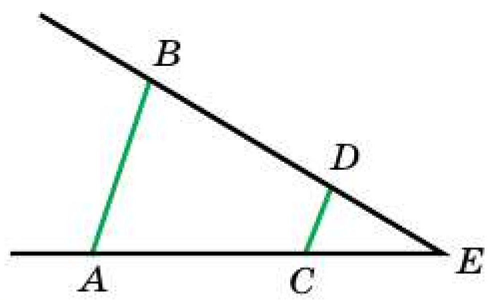


Рис. **14.8**

14.5. Прямая, параллельная стороне AC треугольника ABC, пересекает сторону AB в точке D, а сторону BC — в точке E. Найдите:
1) отрезок BD, если $AB = 16$ см, $AC = 20$ см, $DE = 15$ см;
2) отрезок AD, если $AB = 28$ см, $BC = 63$ см, $BE = 27$ см.

14.6. В треугольнике ABC $AB = 6$ см. Через точку M стороны AB проведена прямая, которая параллельна стороне BC и пересекает сторону AC в точке K. Найдите неизвестные стороны треугольника ABC, если $AM = 4$ см, $MK = 8$ см, $AK = 9$ см.

14.7. Найдите высоту вышки (рис. 14.9), если расстояния от наблюдателя до шеста и до вышки соответственно равны 1,5 м и 39 м, высота шеста — 3 м, а рост наблюдателя — 1,8 м.

14.8. Продолжения боковых сторон AB и CD трапеции $ABCD$ пересекаются в точке E. Найдите отрезок CE, если $DE = 40$ см, $BC : AD = 4 : 5$.

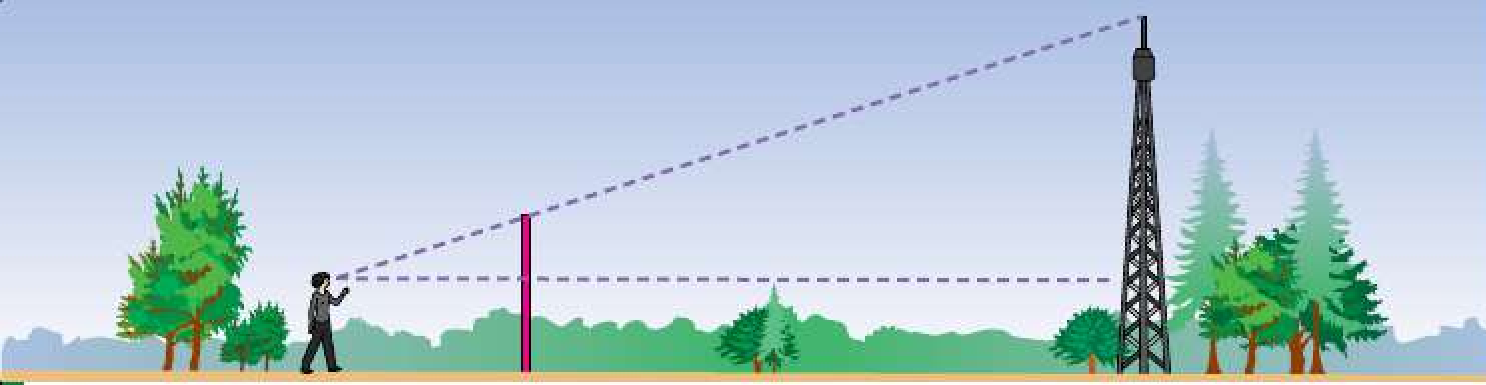


Рис. **14.9**

14.9. Продолжения боковых сторон AB и CD трапеции $ABCD$ пересекаются в точке M. Найдите меньшее основание трапеции, если большее основание AD равно 42 см, $AB = 9$ см, $BM = 54$ см.

14.10. Докажите, что любые два равносторонних треугольника подобны.

14.11. Точки M и K — середины сторон CD и AD квадрата $ABCD$ соответственно. Пользуясь определением подобных треугольников, докажите, что $\triangle MDK \sim \triangle BCD$.

14.12. Стороны треугольника относятся как 5 : 4 : 7. Найдите стороны подобного ему треугольника, у которого: 1) периметр равен 64 см; 2) меньшая сторона равна 24 см.

14.13. Стороны данного треугольника равны 15 см, 25 см и 35 см. Найдите стороны подобного ему треугольника, у которого: 1) периметр равен 45 см; 2) разность наибольшей и наименьшей сторон составляет 16 см.

14.14. На рисунке 14.10 изображены треугольник ABC и вписанный в него ромб $BDEK$. Найдите сторону ромба, если $AB = 10$ см, $BC = 15$ см.

14.15. На рисунке 14.11 изображены прямоугольный треугольник ABC ($\angle B = 90°$) и вписанный в него квадрат $BMKN$. Найдите отрезок CN, если $BM = 6$ см, $AB = 10$ см.

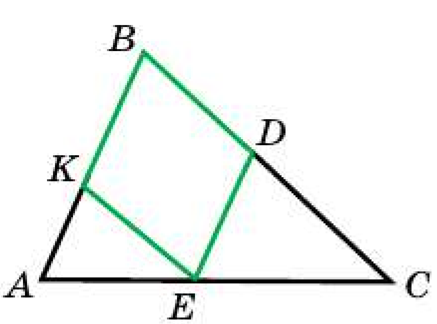


Рис. **14.10**

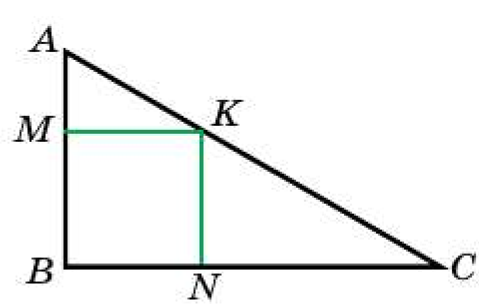


Рис. **14.11**

14.16. Две окружности с центрами O_1 и O_2 и радиусами 8 см и 12 см соответственно имеют внешнее касание в точке A. Их общая внешняя касательная пересекает прямую O_1O_2 в точке B. Найдите расстояния от точки B до центров данных окружностей.

14.17. Точка D принадлежит стороне AC треугольника ABC. Точки M и N принадлежат сторонам AB и BC соответственно, F — точка пересечения отрезков MN и BD. Докажите, что если $MN \parallel AC$, то $\frac{MF}{FN} = \frac{AD}{DC}$.

14.18. Периметр равнобедренного треугольника равен 48 см. Через середину высоты треугольника, опущенной на его основание, проведена прямая, параллельная боковой стороне. Найдите периметр треугольника, который эта прямая отсекает от данного.

14.19. В равнобедренный треугольник, основание которого равно 12 см, а боковая сторона — 18 см, вписана окружность. Найдите расстояние между точками касания этой окружности с боковыми сторонами треугольника.

14.20. В треугольнике ABC $AB = 8$ см, $BC = 12$ см, $\angle ABC = 120°$, отрезок BD — биссектриса. Найдите отрезок BD.

14.21. Через точку пересечения диагоналей трапеции проведена прямая, которая параллельна основаниям и пересекает боковые стороны трапеции в точках M и K. Найдите отрезок MK, если основания трапеции равны a и b.

14.22. Постройте треугольник по двум сторонам и биссектрисе, проведённой к третьей стороне.

§ 15 Первый признак подобия треугольников

Если для треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ выполняются условия $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, $\angle C = \angle C_1$, $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{CA}{C_1A_1}$, то по определению эти треугольники подобны.

Можно ли по меньшему количеству условий определять подобие треугольников? На этот вопрос отвечают признаки подобия треугольников.

Теорема 15.1

(первый признак подобия треугольников: по двум углам)

Если два угла одного треугольника равны двум углам другого треугольника, то такие треугольники подобны.

Доказательство

Рассмотрим треугольники ABC и $A_1B_1C_1$, у которых $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$. Докажем, что $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$.

Если $AB = A_1B_1$, то треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны по второму признаку равенства треугольников, а следовательно, эти треугольники подобны.

Пусть, например, $AB > A_1B_1$. Отложим на стороне BA отрезок BA_2, равный стороне B_1A_1. Через точку A_2 проведём прямую A_2C_2, параллельную стороне AC (рис. 15.1).

Углы A и BA_2C_2 — соответственные при параллельных прямых A_2C_2 и AC и секущей AA_2. Отсюда $\angle A = \angle BA_2C_2$. Но $\angle A = \angle A_1$. Получаем, что $\angle A_1 = \angle BA_2C_2$. Таким образом, треугольники A_2BC_2 и $A_1B_1C_1$ равны по второму признаку равенства треугольников. По лемме о подобных треугольниках $\triangle A_2BC_2 \sim \triangle ABC$. Следовательно, $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$. ■

Задача 1. Средняя линия трапеции $ABCD$ ($BC \parallel AD$) равна 24 см, а её диагонали пересекаются в точке O. Найдите основания трапеции, если $AO : OC = 5 : 3$.

Решение. Рассмотрим треугольники AOD и COB (рис. 15.2). Углы AOD и BOC равны как вертикальные, углы CAD и ACB равны как накрест лежащие при параллельных прямых BC и AD и секущей AC. Следовательно, треугольники AOD и COB подобны по двум углам.

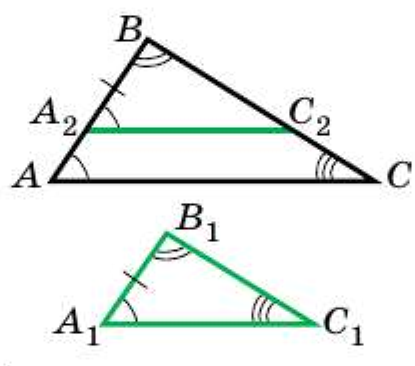


Рис. 15.1

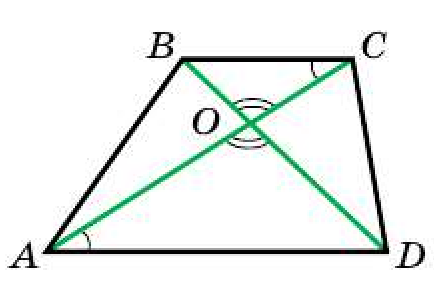


Рис. 15.2

Тогда $\dfrac{AD}{BC} = \dfrac{AO}{CO} = \dfrac{5}{3}$.

Пусть $BC = 3x$ см, тогда $AD = 5x$ см.

Поскольку средняя линия трапеции равна 24 см, то $BC + AD = 48$ см.

Имеем: $3x + 5x = 48$. Отсюда $x = 6$.

Следовательно, $BC = 18$ см, $AD = 30$ см.

Ответ: 18 см, 30 см. ■

Задача 2. В треугольнике ABC ($AB \neq BC$) отрезок BD_1 — биссектриса, луч BD_2 — биссектриса внешнего угла при вершине B. На отрезке D_1D_2 как на диаметре построена окружность (рис. 15.3). Докажите, что для любой точки X этой окружности выполняется равенство $\frac{AX}{XC} = \frac{AB}{BC}$.

Решение. Если точка X совпадает с точкой D_1 или с точкой D_2, то утверждение задачи следует из свойств биссектрисы угла треугольника и биссектрисы внешнего угла треугольника.

Пусть X — произвольная точка окружности, отличная от точек D_1 и D_2. Через точку C проведём прямую, параллельную прямой AX. Пусть эта прямая пересекает прямую XD_1 в точке K, а прямую XD_2 — в точке E.

$$\triangle AD_1X \backsim \triangle CD_1K. \text{ Отсюда } \frac{AX}{CK} = \frac{AD_1}{D_1C}. \qquad (1)$$

$$\triangle AD_2X \backsim \triangle CD_2E. \text{ Отсюда } \frac{AX}{CE} = \frac{AD_2}{D_2C}. \qquad (2)$$

Но, согласно свойствам биссектрисы угла треугольника и биссектрисы внешнего угла треугольника, $\frac{AD_1}{D_1C} = \frac{AD_2}{D_2C} = \frac{AB}{BC}$. Тогда из равенств (1) и (2) получаем:

$\frac{AX}{CK} = \frac{AX}{CE}$.

Отсюда $CK = CE$.

Поскольку D_1D_2 — диаметр, то $\angle KXE = 90°$. В прямоугольном треугольнике KXE отрезок XC — медиана, проведённая к гипотенузе KE. Отсюда $XC = KC$. С учётом равенства (1) запишем: $\frac{AX}{XC} = \frac{AX}{CK} = \frac{AD_1}{D_1C} = \frac{AB}{BC}$. ■

Эта задача и ключевая задача 2 § 13 позволяют сделать такой вывод:

*геометрическое место точек, отношение расстояний от которых до двух данных точек является заданным положительным числом, отличным от 1, — это окружность (**окружность Аполлония**).*

Задача 3 (свойство пересекающихся хорд). Докажите, что если хорды AB и CD окружности пересекаются в точке M, то $AM \cdot MB = DM \cdot MC$ (рис. 15.4).

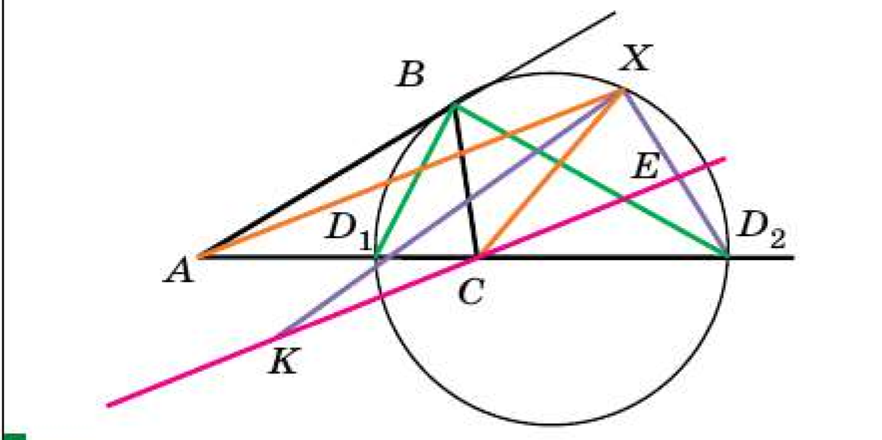


Рис. 15.3

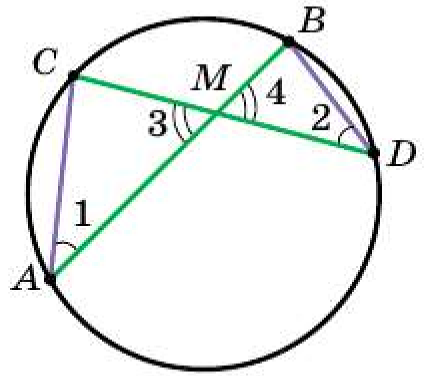


Рис. 15.4

Решение. Рассмотрим треугольники ACM и DBM. Углы 3 и 4 равны как вертикальные, углы 1 и 2 равны как вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу. Следовательно, треугольники ACM и DBM подобны по первому признаку подобия треугольников. Тогда $\frac{AM}{DM} = \frac{MC}{MB}$. Отсюда $AM \cdot MB = DM \cdot MC$. ■

Задача 4 (свойство касательной и секущей). Докажите, что если через точку A к окружности проведены касательная AM (M — точка касания) и прямая (секущая), пересекающая окружность в точках B и C (рис. 15.5), то $AM^2 = AC \cdot AB$.

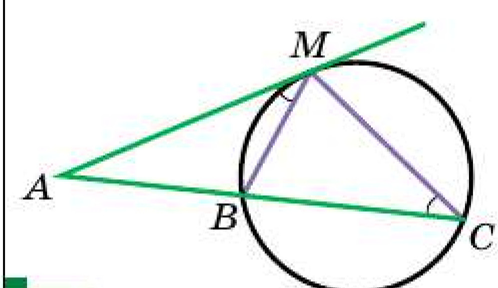


Рис. 15.5

Решение. Рассмотрим треугольники AMB и ACM. У них угол A общий. По свойству угла между касательной и хордой (см. ключевую задачу 1 § 9) $\angle AMB = \frac{1}{2} \smile MB$. Угол MCB — вписанный угол, опирающийся на дугу MB, поэтому $\angle MCB = \frac{1}{2} \smile MB$. Отсюда $\angle AMB = \angle MCB$. Следовательно, треугольники AMB и ACM подобны по первому признаку подобия треугольников. Тогда $\frac{AM}{AC} = \frac{AB}{AM}$. Отсюда $AM^2 = AC \cdot AB$. ■

Задача 5. В треугольнике ABC проведена биссектриса BD. Докажите, что $BD^2 = AB \cdot BC - AD \cdot DC$.

Решение. Пусть луч BD пересекает описанную окружность треугольника ABC в точке D_1 (рис. 15.6). Имеем: углы BAC и BD_1C равны как вписанные, опирающиеся на одну и ту же дугу; $\angle ABD = \angle D_1BC$. Тогда $\triangle ABD \sim \triangle D_1BC$. Отсюда $\frac{AB}{BD_1} = \frac{BD}{BC}$, т. е. $AB \cdot BC = BD_1 \cdot BD$. Поскольку $BD_1 = BD + DD_1$, то можно записать: $AB \cdot BC = BD^2 + BD \cdot DD_1$. Применяя ключевую задачу 3, получим: $BD \cdot DD_1 = AD \cdot DC$. Тогда $AB \cdot BC = BD^2 + AD \cdot DC$. Отсюда $BD^2 = AB \cdot BC - AD \cdot DC$. ■

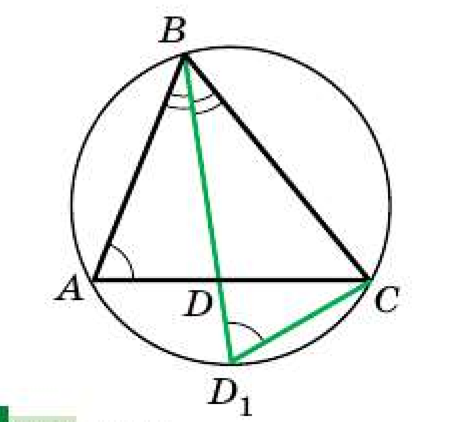


Рис. **15.6**

Теорема 15.2

(теорема Птолемея)

Произведение диагоналей вписанного четырёхугольника равно сумме произведений его противолежащих сторон.

Доказательство

На рисунке 15.7 изображён вписанный в окружность четырёхугольник $ABCD$. Докажем, что $AB \cdot DC + BC \cdot AD = BD \cdot AC$.

На диагонали AC отметим точку K так, что $\angle 1 = \angle 2$. Углы 3 и 4 равны как вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу BC. Следовательно, треугольники ABK и DBC подобны по первому признаку подобия треугольников. Отсюда $\frac{AB}{BD} = \frac{AK}{DC}$, т. е.

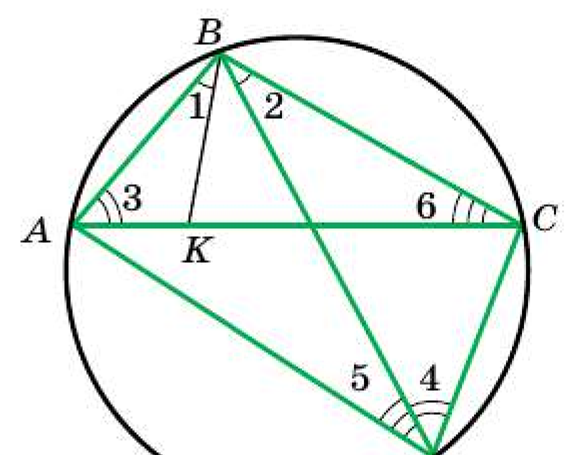


Рис. **15.7**

$$AB \cdot DC = BD \cdot AK. \quad (3)$$

Поскольку $\angle 1 = \angle 2$, то $\angle ABD = \angle KBC$. Углы 5 и 6 равны как вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу AB. Поэтому $\triangle KBC \sim \triangle ABD$. Отсюда $\frac{BC}{BD} = \frac{KC}{AD}$, т. е.

$$BC \cdot AD = BD \cdot KC. \quad (4)$$

Сложив равенства (3) и (4), получаем:

$AB \cdot DC + BC \cdot AD = BD \cdot AK + BD \cdot KC$, т. е.

$AB \cdot DC + BC \cdot AD = BD(AK + KC) = BD \cdot AC$. ■

Клавдий Птолемей (ок. 100 — ок. 178)

Древнегреческий математик и астроном. Автор геоцентрической модели мира. Разработал математическую теорию движения планет, позволяющую вычислять их положение. Создал прообраз современной системы координат.

Задача 6. Пусть M — произвольная точка описанной окружности равностороннего треугольника ABC. Докажите, что один из отрезков MA, MB, MC равен сумме двух других.

Решение. Если точка M совпадает с одной из вершин треугольника ABC, то утверждение задачи очевидно.

Пусть, например, точка M принадлежит дуге AC, причём отлична от её концов (рис. 15.8). Четырёхугольник $MABC$ является вписанным. Тогда по теореме Птолемея $AC \cdot MB = AB \cdot MC + BC \cdot MA$. Поскольку $AB = BC = AC$, то $MB = MC + MA$. ■

1. Сформулируйте первый признак подобия треугольников.
2. Сформулируйте свойство пересекающихся хорд.
3. Сформулируйте свойство касательной и секущей, проведённых к окружности через одну точку.
4. Сформулируйте теорему Птолемея.

Упражнения

15.1. На рисунке 15.9 $\angle BAC = \angle BED$. Подобны ли треугольники ABC и EDB? В случае утвердительного ответа укажите пары соответственных сторон.

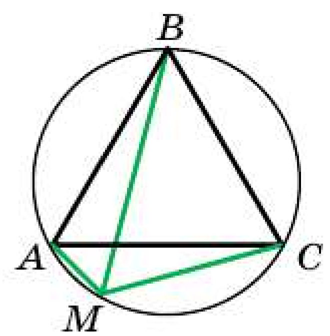


Рис. 15.8

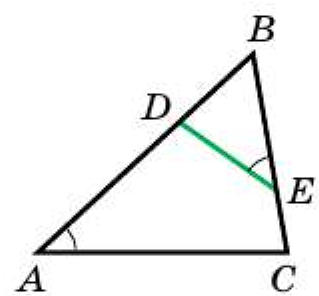


Рис. 15.9

15.2. На рисунке 15.10 $DE \perp AB$, $BC \perp AD$. Укажите все пары подобных треугольников, изображённых на этом рисунке.

15.3. На рисунке 15.11 $\angle ABC = \angle BDC$. Какие треугольники на этом рисунке подобны? Запишите равенство отношений их соответственных сторон.

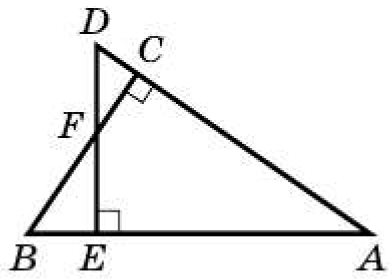


Рис. 15.10

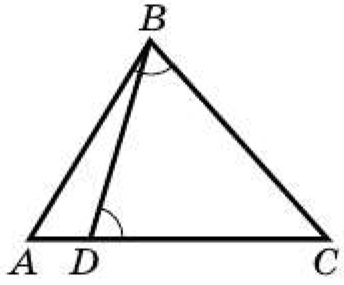


Рис. 15.11

15.4. Укажите пары подобных треугольников, изображённых на рисунке 15.12, найдите длину отрезка x (размеры даны в сантиметрах).

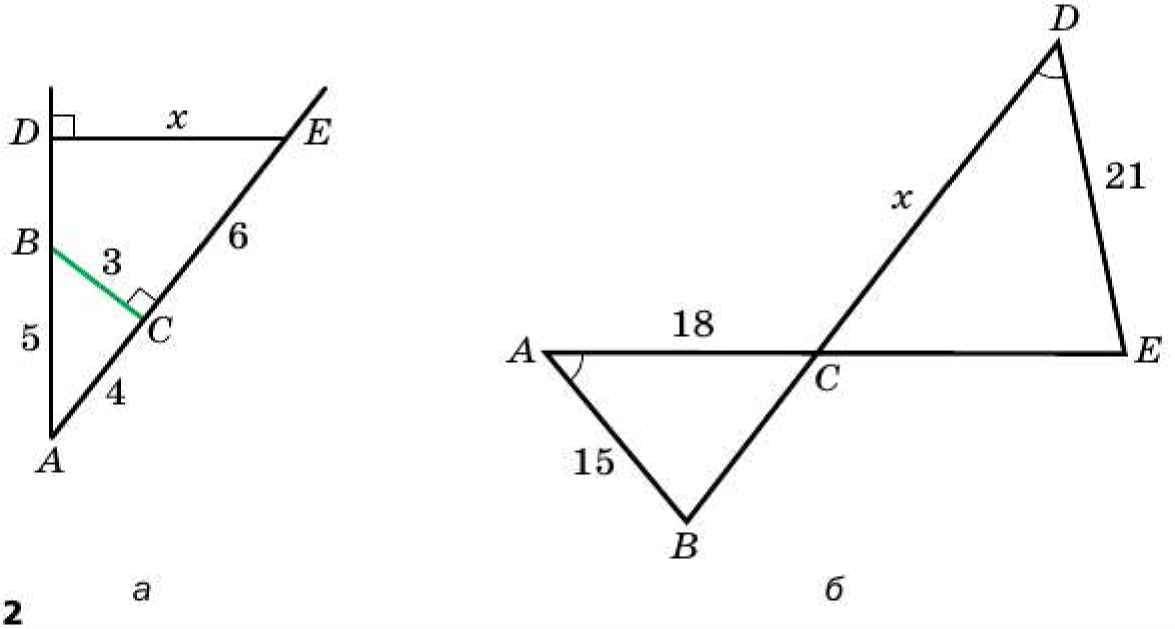


Рис. 15.12

15.5. На стороне CD параллелограмма $ABCD$ отметили точку E, прямые BE и AD пересекаются в точке F (рис. 15.13), $CE = 8$ см, $DE = 4$ см, $BE = 10$ см, $AD = 9$ см. Найдите отрезки EF и FD.

15.6. В трапеции $ABCD$ ($BC \parallel AD$) $AD = 20$ см, $BC = 15$ см, O — точка пересечения диагоналей, $AO = 16$ см. Найдите отрезок OC.

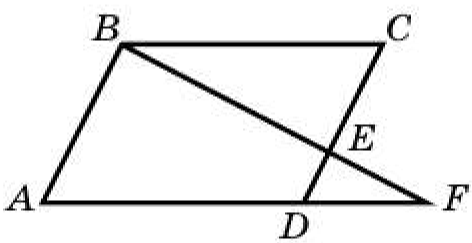


Рис. 15.13

15.7. Диагонали трапеции $ABCD$ с основаниями BC и AD пересекаются в точке O. Найдите основание AD, если $BO : OD = 3 : 7$, $BC = 18$ см.

15.8. В трапеции $ABCD$ с основаниями BC и AD диагонали пересекаются в точке O. Известно, что $BO = 4$ см, $OD = 20$ см, $AC = 36$ см. Найдите отрезки AO и OC.

15.9. В трапеции $ABCD$ ($BC \parallel AD$) $AD = 18$ см, $BC = 14$ см, $AC = 24$ см. Найдите отрезки, на которые точка пересечения диагоналей делит диагональ AC.

15.10. Можно ли утверждать, что два равнобедренных треугольника подобны, если у них есть: 1) по равному острому углу; 2) по прямому углу; 3) по равному тупому углу?

15.11. Из вершины прямого угла треугольника опущена высота на гипотенузу. Сколько подобных треугольников образовалось при этом?

15.12. Стороны параллелограмма равны 20 см и 14 см, высота, проведённая к большей стороне, равна 7 см. Найдите высоту параллелограмма, проведённую к меньшей стороне.

15.13. Докажите, что в подобных треугольниках биссектрисы, проведённые из вершин соответственных углов, относятся как соответственные стороны.

15.14. Докажите, что в подобных треугольниках высоты, проведённые из вершин соответственных углов, относятся как соответственные стороны.

15.15. Основания BC и AD трапеции $ABCD$ равны соответственно 28 см и 63 см. Известно, что $\angle ABC = \angle ACD$. Найдите диагональ AC.

15.16. На стороне AC треугольника ABC отметили точку D такую, что $\angle ABD = \angle ACB$. Известно, что $AB = 20$ см, $BC = 28$ см, $AC = 40$ см. Найдите неизвестные стороны треугольника ABD.

15.17. Гипотенуза прямоугольного треугольника равна 20 см, а больший катет — 16 см. Найдите отрезки, на которые серединный перпендикуляр гипотенузы делит больший катет.

15.18. Объясните с помощью рисунка 15.14, как можно найти ширину BM реки, используя подобие треугольников.

15.19. Дерево находится на расстоянии 60 м от объектива фотоаппарата. Высота его изображения на плёнке равна 8 мм.

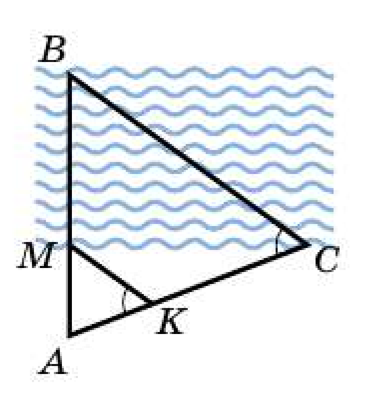


Рис. 15.14

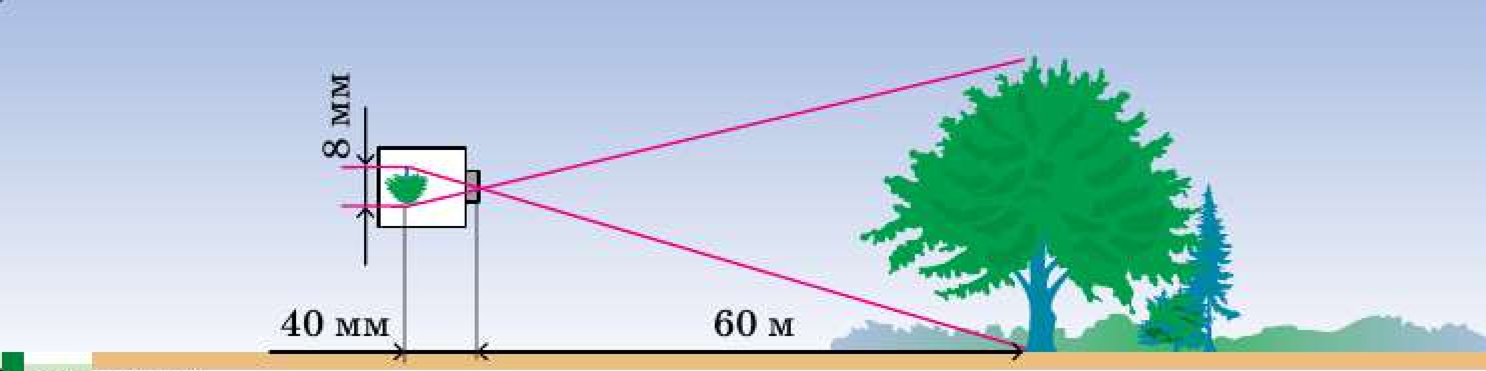


Рис. 15.15

Расстояние от объектива до плёнки равно 40 мм (рис. 15.15). Какова высота дерева?

15.20. Найдите высоту дерева, если длина его тени равна 8,4 м, а длина тени от вертикального столба высотой 2 м в это же время суток равна 2,4 м (рис. 15.16).

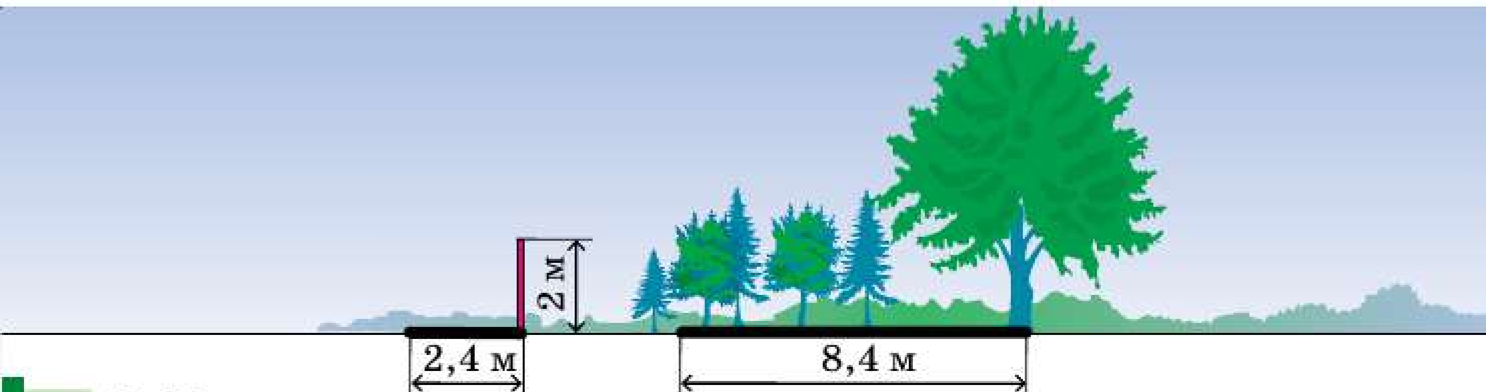


Рис. 15.16

15.21. Может ли прямая пересекать две стороны равнобедренного треугольника, отсекать от него треугольник, ему подобный, и не быть параллельной третьей стороне?

15.22. Хорды AB и CD окружности пересекаются в точке M. Известно, что $AM = 6$ см, $BM = 14$ см, $CM = 12$ см. Найдите отрезок DM.

15.23. Хорды MK и NP окружности пересекаются в точке F. Известно, что $MF = 9$ см, $KF = 12$ см, а отрезок NF в 3 раза длиннее отрезка PF. Найдите длину хорды NP.

15.24. Точка K делит хорду AC окружности пополам, а хорду DE — на отрезки длиной 2 см и 32 см. Найдите длину хорды AC.

15.25. На хорде AB отметили точку M. Докажите, что $MA \cdot MB = R^2 - d^2$, где R — радиус окружности, d — расстояние от точки M до центра окружности.

15.26. Точка E делит хорду CD окружности на отрезки длиной 15 см и 16 см. Найдите радиус окружности, если расстояние от точки E до центра окружности равно 4 см.

15.27. Точка P делит хорду MK окружности на два отрезка длиной 8 см и 12 см. Найдите расстояние от точки P до центра окружности, если её радиус равен 11 см.

15.28. Через точку A проведены к окружности касательная AM (M — точка касания) и секущая, которая пересекает окружность в точках K и P (точка K лежит между точками A и P). Найдите отрезок KP, если $AM = 12$ см, $AP = 18$ см.

15.29. Через точку A, лежащую вне окружности, проведены две прямые, одна из которых касается окружности в точке B, а другая пересекает окружность в точках C и D (точка C лежит между точками A и D), $AB = 18$ см, $AC : CD = 4 : 5$. Найдите отрезок AD.

15.30. Через точку A, лежащую вне окружности (рис. 15.17), проведены две прямые, одна из которых пересекает окружность в точках B и C (точка B лежит между точками A и C), а другая — в точках D и E (точка D лежит между точками A и E).

1) Докажите, что $AB \cdot AC = AD \cdot AE$.
2) Найдите отрезок AE, если $AB = 18$ см, $BC = 12$ см и $AD : DE = 5 : 7$.

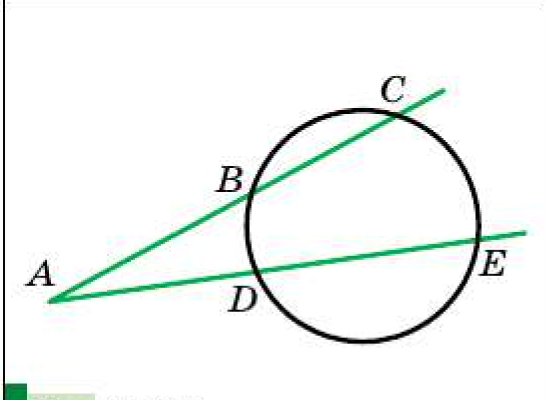


Рис. 15.17

15.31. Через точку M, лежащую вне окружности, проведена прямая, пересекающая данную окружность в точках A и B. Докажите, что $MA \cdot MB = d^2 - R^2$, где R — радиус окружности, d — расстояние от точки M до центра окружности.

15.32. В окружности, радиус которой равен 8 см, проведена хорда AB. На прямой AB вне отрезка AB отметили точку C такую, что $AC : BC = 1 : 4$. Найдите расстояние от точки C до центра окружности, если $AB = 9$ см.

15.33. В равнобедренном треугольнике основание и боковая сторона соответственно равны 5 см и 20 см. Найдите биссектрису треугольника, проведённую к боковой стороне.

15.34. В треугольнике ABC $BC = 18$ см, $AC = 15$ см, $AB = 12$ см. Найдите биссектрису треугольника, проведённую к стороне BC.

15.35. В треугольник ABC вписан квадрат так, что две его соседние вершины принадлежат стороне AC, а две другие — сторонам AB и BC соответственно. Найдите сторону квадрата, если $AC = a$, а высота, проведённая к стороне AC, равна h.

15.36. В треугольнике ABC $BC = 72$ см, AD — высота, $AD = 24$ см. В данный треугольник вписан прямоугольник $MNKP$ так, что вершины M и P принадлежат стороне BC, а вершины N и K — сторонам AB и AC соответственно. Найдите стороны прямоугольника, если $MP : MN = 9 : 5$.

15.37. Через вершины B и C треугольника ABC проходит окружность, пересекающая стороны AB и AC в точках K и M соответственно. Найдите отрезки MK и AM, если $AB = 2$ см, $BC = 4$ см, $AC = 5$ см, $AK = 1$ см.

15.38. На продолжении биссектрисы CF треугольника ABC за точку C отметили точку D так, что $\angle ADB = \frac{1}{2}\angle ACB$. Докажите, что $CD^2 = AC \cdot CB$.

15.39. Продолжение медианы AM треугольника ABC пересекает его описанную окружность в точке D. Известно, что $AC = DC = 1$ см. Найдите сторону BC.

15.40. В окружность вписан треугольник, одна из сторон которого равна 21 см. Параллельно этой стороне через точку пересечения медиан проведена хорда. Отрезки хорды, расположенные вне треугольника, равны 8 см и 11 см. Найдите неизвестные стороны треугольника.

15.41. В окружность вписан треугольник ABC, в котором проведены медианы AF и BK. Медиану AF продлили до пересечения с окружностью в точке D. Найдите стороны AC и BC, если $BK = 63$ см, $AF = 45$ см, $FD = 24{,}2$ см.

15.42. Высоты AA_1, BB_1 и CC_1 остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке H. Докажите, что $AH \cdot HA_1 = BH \cdot HB_1 = CH \cdot HC_1$.

15.43. Отрезок AD — биссектриса треугольника ABC. Известно, что $AB - BD = 4$ см, $AC + CD = 9$ см. Найдите отрезок AD.

15.44. В угол вписаны две окружности. Точки A и B — точки касания первой окружности со сторонами угла, точки A_1 и B_1 — точки касания второй окружности со сторонами угла (рис. 15.18). Отрезок AB_1 пересекает эти окружности в точках C и C_1. Докажите, что $AC = B_1C_1$.

15.45. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ $\angle BAC = \angle CBD$ и $\angle BCA = \angle CDB$. Через точки A, D и точку пересечения диагоналей четырёхугольника проведена окружность. Через точки B и C к окружности провели касательные BK и CF (K и F — точки касания). Докажите, что $BK = CF$.

15.46. Докажите, что середины оснований трапеции, точка пересечения диагоналей и точка пересечения боковых сторон лежат на одной прямой.

15.47. Дан выпуклый четырёхугольник $ABCD$. Лучи AB и DC пересекаются в точке F, а лучи BC и AD — в точке E. Точки E и F равноудалены от прямой BD. Докажите, что диагональ AC делит диагональ BD пополам.

15.48. Даны отрезок AB и прямая l, параллельная этому отрезку. С помощью только линейки разделите отрезок AB пополам.

15.49. Около остроугольного треугольника ABC описана окружность с центром в точке O. Через точки B и C перпендикулярно прямой AO проведены прямые, пересекающие прямые AC и AB в точках M и N соответственно. Докажите, что $BC^2 = BM \cdot CN$.

15.50. На окружности отметили точку K. Провели окружность с центром в точке K, которая касается диаметра первой окружности в точке E и пересекает первую окружность в точках P и M (рис. 15.19). Докажите, что прямая PM делит отрезок KE пополам.

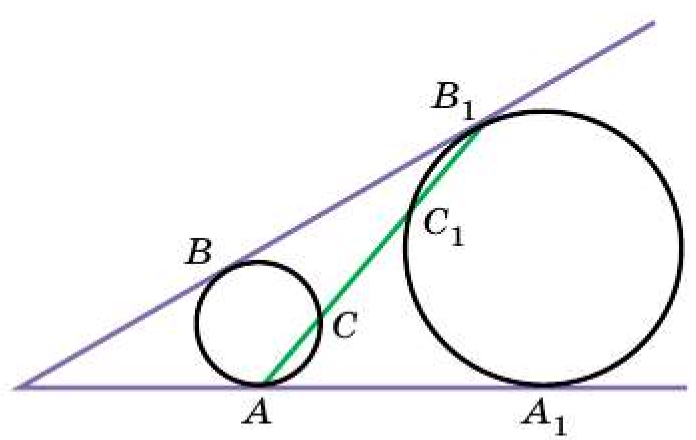


Рис. 15.18

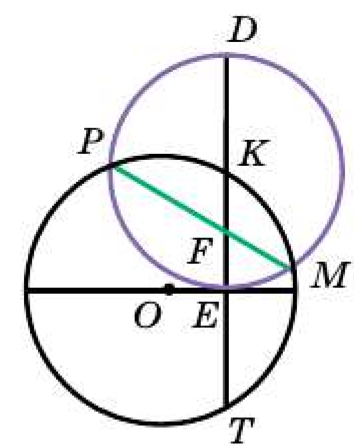


Рис. 15.19

15.51. Биссектриса угла A треугольника ABC пересекает описанную около него окружность в точке D. Докажите, что $AB + AC < 2AD$.

15.52. На окружности отметили точки A, B, C и D такие, что $\cup AB = \cup BC = \cup CD$. Докажите, что $AC^2 = AB \cdot (BC + AD)$.

15.53. На рисунке 15.20 изображён вписанный в окружность семиугольник $ABCDEFG$, все стороны которого равны. Докажите, что $\frac{1}{AC} + \frac{1}{AD} = \frac{1}{AB}$.

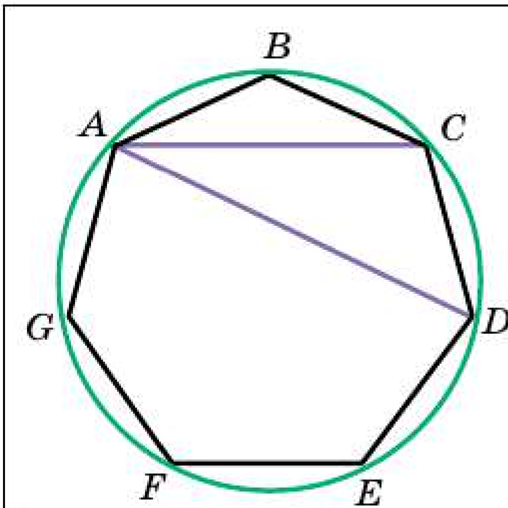


Рис. 15.20

Теорема Менелая. Теорема Чевы

Напомним, что точки, принадлежащие одной прямой, называют коллинеарными.

В этом параграфе вы узнаете об одной знаменитой теореме, которая служит критерием коллинеарности трёх точек. Эта теорема носит имя древнегреческого математика и астронома Менелая Александрийского (I—II вв. н. э.).

Теорема 16.1

(теорема Менелая)

На сторонах AB и BC треугольника ABC отметили соответственно точки C_1 и A_1, а на продолжении стороны AC — точку B_1. Для того чтобы точки A_1, B_1 и C_1 лежали на одной прямой, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство

$$\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1. \qquad (*)$$

Доказательство

Сначала докажем необходимое условие коллинеарности: если точки A_1, B_1 и C_1 лежат на одной прямой, то выполняется равенство (*).

Из вершин треугольника ABC опустим перпендикуляры AM, BN и CP на прямую C_1B_1 (рис. 16.1). Поскольку $\angle MC_1A = \angle NC_1B$, то треугольники AMC_1 и BNC_1 подобны по первому признаку подобия треугольников. Отсюда $\frac{AC_1}{C_1B} = \frac{AM}{BN}$. Из подобия треугольников BNA_1 и CPA_1 получаем: $\frac{BA_1}{A_1C} = \frac{BN}{CP}$. Из подобия треугольников B_1CP и B_1AM следует равенство $\frac{CB_1}{B_1A} = \frac{CP}{AM}$. Перемножив почленно левые и правые части пропорций $\frac{AC_1}{C_1B} = \frac{AM}{BN}$, $\frac{BA_1}{A_1C} = \frac{BN}{CP}$, $\frac{CB_1}{B_1A} = \frac{CP}{AM}$, получаем равенство $\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = \frac{AM}{BN} \cdot \frac{BN}{CP} \cdot \frac{CP}{AM} = 1$.

Теперь докажем достаточное условие коллинеарности: если выполняется равенство (*), то точки A_1, B_1 и C_1 лежат на одной прямой.

Пусть прямая C_1B_1 пересекает сторону BC треугольника ABC в некоторой точке A_2 (рис. 16.2). Поскольку точки C_1, A_2 и B_1 лежат

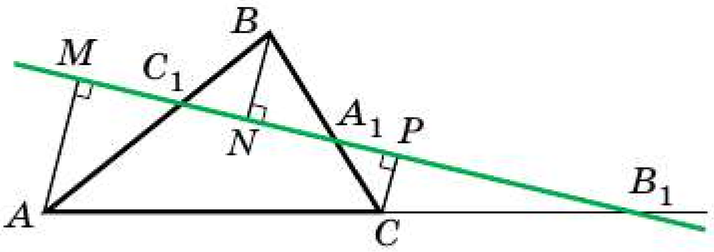


Рис. **16.1**

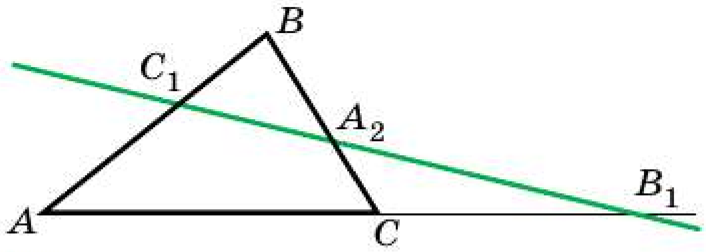


Рис. **16.2**

на одной прямой, то из доказанного выше можно записать: $\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_2}{A_2C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1$. Сопоставляя это равенство с равенством (*), приходим к выводу, что $\frac{BA_1}{A_1C} = \frac{BA_2}{A_2C}$, т. е. точки A_2 и A_1 делят отрезок BC в одном и том же отношении, а значит, эти точки совпадают. Отсюда следует, что прямая C_1B_1 пересекает сторону BC в точке A_1. ■

Заметим, что теорема остаётся справедливой и тогда, когда точки A_1, B_1 и C_1 лежат не на сторонах треугольника ABC, а на их продолжениях (рис. 16.3). Для этого случая проведите доказательство самостоятельно.

Задача 1. На стороне BC треугольника ABC выбрали точку N так, что $BN : NC = 2 : 3$. В каком отношении медиана BM делит отрезок AN?

Решение. Заметим, что мы решали эту задачу с помощью теоремы о пропорциональных отрезках в § 12. Теперь решим её с помощью теоремы Менелая.

Пусть отрезки AN и BM пересекаются в точке O (рис. 16.4). Прямая BM пересекает две стороны треугольника ANC. Тогда по теореме Менелая можно записать: $\frac{CM}{MA} \cdot \frac{AO}{ON} \cdot \frac{NB}{BC} = 1$. С учётом того, что $\frac{CM}{MA} = 1$ и $\frac{NB}{BC} = \frac{2}{5}$, получаем: $\frac{AO}{ON} \cdot \frac{2}{5} = 1$. Отсюда $\frac{AO}{ON} = \frac{5}{2}$.

Ответ: $\frac{5}{2}$. ■

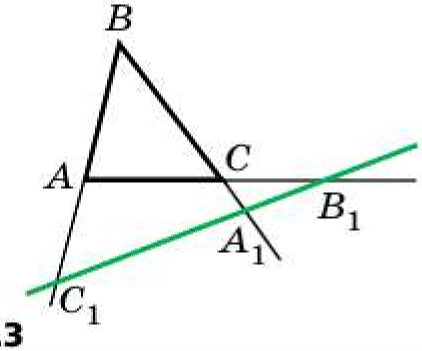


Рис. **16.3**

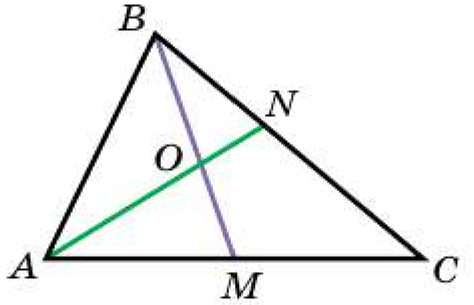


Рис. **16.4**

Задача 2. Общие внешние касательные к трём окружностям пересекаются в точках A, B и C (рис. 16.5). Докажите, что эти точки коллинеарны.

Решение. Обозначим радиусы окружностей с центрами O_1, O_2 и O_3 соответственно r_1, r_2 и r_3. Отрезки O_1M и O_2N — радиусы, проведённые в точки касания (рис. 16.5).

Легко показать, что точки O_1, O_2 и A лежат на одной прямой. Отсюда $\triangle AO_1M \sim \triangle AO_2N$. Получаем: $\frac{AO_1}{AO_2} = \frac{O_1M}{O_2N} = \frac{r_1}{r_2}$.

Аналогично можно доказать, что $\frac{BO_1}{BO_3} = \frac{r_1}{r_3}$, $\frac{CO_2}{CO_3} = \frac{r_2}{r_3}$.

Для точек A, B и C, лежащих на продолжениях сторон треугольника $O_1O_2O_3$, рассмотрим произведение трёх отношений $\frac{O_2A}{AO_1} \cdot \frac{O_1B}{BO_3} \cdot \frac{O_3C}{CO_2}$. Это произведение равно $\frac{r_2}{r_1} \cdot \frac{r_1}{r_3} \cdot \frac{r_3}{r_2} = 1$. Следовательно, точки A, B и C лежат на одной прямой. ■

На сторонах BC, CA и AB треугольника ABC отметим произвольные точки A_1, B_1 и C_1 (рис. 16.6). Каждый из отрезков AA_1, BB_1 и CC_1 называют **чевианой** треугольника ABC. Такое название связано с именем итальянского инженера и математика Джованни Чевы (1648—1734), открывшего удивительную теорему.

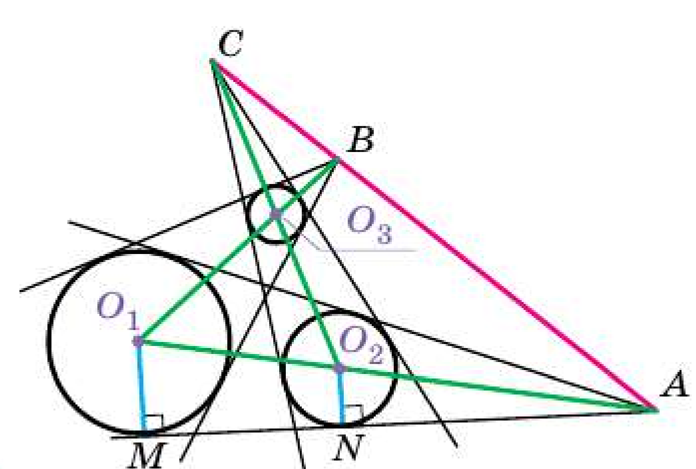


Рис. 16.5

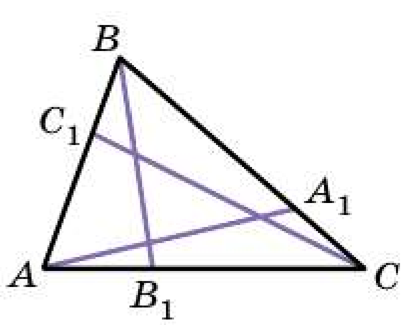


Рис. 16.6

Если точки A_1, B_1 и C_1 выбраны так, что чевианы являются биссектрисами, либо медианами, либо высотами остроугольного треугольника, то эти чевианы пересекаются в одной точке.

Если три прямые пересекаются в одной точке, то их называют **конкурентными**.

Теорема Чевы даёт общий критерий конкурентности трёх произвольных чевиан.

Теорема 16.2

(теорема Чевы)

Для того чтобы чевианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекались в одной точке, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство

$$\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1. \qquad (**)$$

Доказательство

Докажем сначала необходимое условие конкурентности: если чевианы AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке (рис. 16.7), то выполняется равенство (**).

Применим теорему Менелая к треугольникам ABB_1, CBB_1 и прямым CC_1 и AA_1 соответственно:

$$\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BD}{DB_1} \cdot \frac{B_1C}{CA} = 1, \qquad (1)$$

$$\frac{CA_1}{A_1B} \cdot \frac{BD}{DB_1} \cdot \frac{B_1A}{AC} = 1. \qquad (2)$$

Из равенств (1) и (2) получаем: $\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BD}{DB_1} \cdot \frac{B_1C}{CA} = \frac{CA_1}{A_1B} \cdot \frac{BD}{DB_1} \cdot \frac{B_1A}{AC}$.

Отсюда $\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{B_1C}{1} = \frac{CA_1}{A_1B} \cdot \frac{B_1A}{1}$ или $\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{A_1B}{CA_1} \cdot \frac{B_1C}{B_1A} = 1$.

Докажем теперь достаточное условие конкурентности: если выполняется равенство (**), то чевианы AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке.

Пусть чевианы AA_1 и BB_1 пересекаются в точке D, а чевиана, проходящая через вершину C и точку D, пересекает сторону AB в некоторой точке C_2 (рис. 16.8). Из доказанного выше можно записать:

$$\frac{AC_2}{C_2B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1.$$

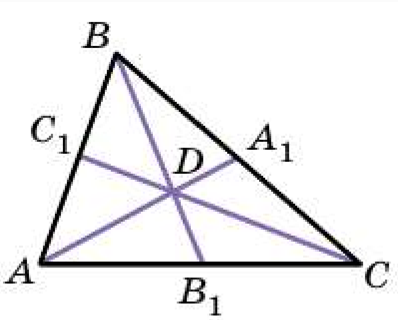


Рис. 16.7

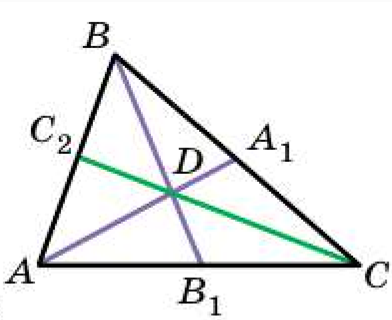


Рис. 16.8

Сопоставляя это равенство с равенством (**), приходим к выводу, что $\frac{AC_1}{C_1B} = \frac{AC_2}{C_2B}$, т. е. точки C_1 и C_2 делят отрезок AB в одном и том же отношении, а значит, эти точки совпадают. Следовательно, прямая CD пересекает сторону AB в точке C_1. ■

Задача 3. Вписанная окружность касается сторон BC, AC и AB треугольника ABC в точках A_1, B_1 и C_1 соответственно (рис. 16.9). Докажите, что чевианы AA_1, BB_1 и CC_1 конкурентны.

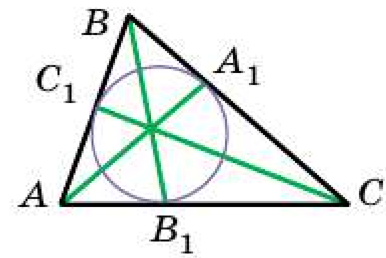


Рис. 16.9

Решение. По свойству касательных имеем:

$$AC_1 = AB_1,\ BC_1 = BA_1,\ CA_1 = CB_1.$$

Для точек C_1, A_1 и B_1 рассмотрим произведение трёх отношений $\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A}$. С учётом записанных выше равенств это произведение равно 1. Следовательно, чевианы AA_1, BB_1 и CC_1 конкурентны. ■

?

1. Какие точки называют коллинеарными?
2. Сформулируйте теорему Менелая.
3. Какие прямые называют конкурентными?
4. Сформулируйте теорему Чевы.

Упражнения

16.1. На сторонах AB и BC треугольника ABC отметили соответственно точки C_1 и A_1 так, что $\frac{AC_1}{C_1B} = \frac{1}{2}$, $\frac{BA_1}{A_1C} = \frac{3}{4}$. Отрезки AA_1 и CC_1 пересекаются в точке F. В каком отношении точка F делит каждый из отрезков AA_1 и CC_1?

16.2. На сторонах CB и CA треугольника ABC отметили точки A_1 и B_1 соответственно. Отрезки AA_1 и BB_1 пересекаются в точке K. Известно, что $\frac{AB_1}{B_1C} = \frac{2}{3}$, $\frac{BK}{KB_1} = 4$. Найдите, в каком отношении точка K делит отрезок AA_1.

16.3. На стороне AC треугольника ABC отметили точку M так, что $AM = \frac{1}{3}AC$, а на луче CB отметили точку N так, что $BN = BC$. В каком отношении точка P пересечения отрезков AB и MN делит каждый из этих отрезков?

16.4. Используя теорему Чевы, докажите, что:
1) медианы треугольника пересекаются в одной точке;
2) биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке.

16.5. На сторонах BC и AC треугольника ABC соответственно отметили точки A_1 и B_1 так, что отрезки AA_1, BB_1 и медиана CD треугольника пересекаются в одной точке. Докажите, что $A_1B_1 \parallel AB$.

◆◆◆

16.6. В треугольнике ABC проведены биссектрисы AA_1 и BB_1. Биссектриса внешнего угла при вершине C пересекает прямую AB в точке C_1. Докажите, что точки A_1, B_1 и C_1 коллинеарны.

16.7. Биссектрисы внешних углов при вершинах A, B и C треугольника ABC пересекают прямые BC, AC и AB в точках A_1, B_1 и C_1 соответственно. Докажите, что эти точки коллинеарны.

16.8. Вписанная окружность треугольника ABC касается сторон AB, BC и AC в точках M, N и K соответственно. Прямая MN пересекает прямую AC в точке P такой, что $PC = AC$. В каком отношении точка K делит сторону AC?

16.9. Решите с помощью теоремы Чевы задачу 15.46.

16.10. Точки P, M, Q и N — середины соответственно сторон AB, BC, CD и DA трапеции $ABCD$ ($BC \parallel AD$). Докажите, что прямые MN, AQ и DP пересекаются в одной точке.

16.11. На сторонах AB и AD параллелограмма $ABCD$ отметили соответственно точки E и F такие, что $\frac{AE}{AB} = \frac{2}{3}$, $AF = FD$. В каком отношении диагональ AC делится точкой её пересечения с прямой EF?

16.12. На стороне AD и диагонали AC параллелограмма $ABCD$ отметили соответственно точки N и M так, что $AN = \frac{1}{5}AD$, $AM = \frac{1}{6}AC$. Докажите, что точки N, M и B лежат на одной прямой.

16.13. В четырёхугольник $ABCD$ вписана окружность, касающаяся сторон AB, BC, CD и DA в точках M, N, K и P соответственно. Прямые MN и PK пересекаются в точке F. Докажите, что точка F принадлежит прямой AC.

16.14. Окружность с центром O_1 касается двух окружностей с центрами O_2 и O_3 в точках B и A соответственно (рис. 16.10). Докажите, что точка C — точка пересече-

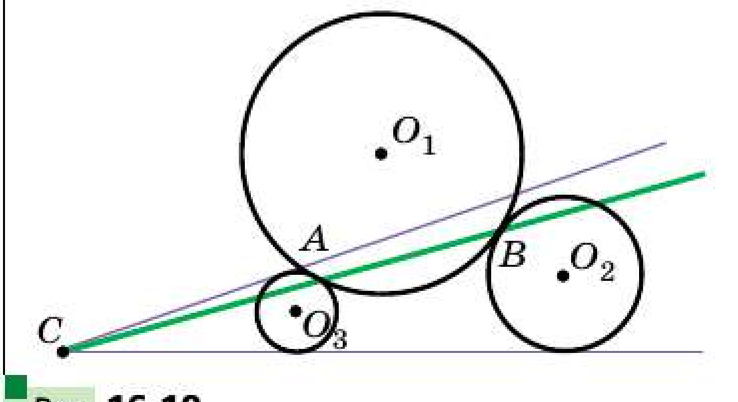


Рис. **16.10**

ния общих касательных к окружностям с центрами O_2 и O_3 — принадлежит прямой AB.

16.15. Окружность пересекает сторону AB треугольника ABC в точках C_1 и C_2, сторону CA — в точках B_1 и B_2, сторону BC — в точках A_1 и A_2. Докажите, что если прямые AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке, то и прямые AA_2, BB_2 и CC_2 пересекаются в одной точке.

16.16. Прямая пересекает стороны AB, BC и продолжение стороны AC треугольника ABC соответственно в точках D, E и F. Докажите, что середины отрезков DC, AE и BF лежат на одной прямой (эту прямую называют *прямой Гаусса*).

Карл Фридрих Гаусс (1777—1855)

Выдающийся немецкий математик, астроном, физик, геодезист.
В его творчестве органически сочетались исследования по теоретической и прикладной математике. Работы Гаусса оказали большое влияние на дальнейшее развитие алгебры, теории чисел, геометрии, теории электричества и магнетизма.

16.17. Чевианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке P. Докажите, что прямые, проходящие через середины сторон BC, CA и AB параллельно прямым AP, BP и CP соответственно, конкурентны.

16.18. На сторонах AB, BC и CA треугольника ABC отметили точки C_1, A_1 и B_1 соответственно так, что прямые AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в точке O. Прямая, проходящая через точку O параллельно стороне AC, пересекает отрезки A_1B_1 и B_1C_1 в точках K и M соответственно. Докажите, что $OK = OM$.

16.19. Чевианы AA_1 и CC_1 и высота BH треугольника ABC конкурентны. Докажите, что $\angle BHA_1 = \angle BHC_1$.

§ 17 Прямая Эйлера. Окружность девяти точек

Точка пересечения серединных перпендикуляров сторон треугольника — это центр окружности, описанной около треугольника. Обозначим эту точку буквой O.

Точка пересечения биссектрис треугольника — это центр вписанной окружности. Обозначим эту точку буквой J.

Точка пересечения прямых, содержащих высóты треугольника, — это его **ортоцентр**. Обозначим эту точку буквой H.

Точку пересечения медиан треугольника называют **центроидом** треугольника. Обозначим эту точку буквой M.

Точки O, J, H и M называют **замечательными точками** треугольника. Использование такого эмоционального эпитета вполне обоснованно, ведь эти точки обладают целым рядом красивых свойств. Разве не замечательно уже хотя бы то, что они существуют в любом треугольнике?

Рассмотрим одну из многих теорем о замечательных точках треугольника.

Теорема 17.1

В любом треугольнике центр описанной окружности, центроид и ортоцентр лежат на одной прямой.

Эту прямую называют **прямой Эйлера**.

Леонард Эйлер (1707—1783)

Выдающийся математик, физик, механик, астроном. Уроженец Швейцарии, приехал в Россию в 20 лет по приглашению Петербургской академии наук. Более 30 лет он провёл в России, здесь же создал большинство своих научных трудов. С точки зрения математики XVIII век — это век Эйлера. Если до него достижения в области математики были разрознены и не всегда согласованы, то Эйлер впервые соединил анализ, алгебру, тригонометрию, теорию чисел и другие дисциплины в единую систему и добавил немало собственных открытий. Значительная часть математики преподаётся с тех пор «по Эйлеру». Кроме математики, он глубоко изучал ботанику, медицину, химию, теорию музыки, множество европейских и прикладных языков. Свои математические исследования Эйлер широко применял для решения практических проблем механики, баллистики, картографии, кораблестроения. Двухтомная классическая монография «Универсальная арифметика» (которая издавалась также под названиями «Начала алгебры» и «Полный курс алгебры») была переведена на многие языки и переиздавалась около 30 раз (трижды — на русском языке). Все последующие учебники алгебры создавались под сильнейшим влиянием Эйлера. Эйлер воспитал первых российских математиков, ставших членами Петербургской академии наук.

Доказательство

Для равнобедренного треугольника доказываемое утверждение очевидно.

Если данный треугольник ABC прямоугольный ($\angle C = 90°$), то его ортоцентр — это точка C, центр описанной окружности — середина гипотенузы AB. Тогда понятно, что все три точки, о которых идёт речь в теореме, принадлежат медиане, проведённой к гипотенузе.

Докажем теорему для остроугольного разностороннего треугольника.

Лемма

Если H — ортоцентр треугольника ABC, OM_1 — перпендикуляр, опущенный из центра O описанной окружности на сторону BC, то $AH = 2OM_1$ (рис. 17.1).

Доказательство

Выполним дополнительное построение, уже знакомое вам по доказательству теоремы 2.4: через каждую вершину треугольника ABC проведём прямую, параллельную противолежащей стороне. Получим треугольник $A_1B_1C_1$ (рис. 17.1). В теореме 2.4 было показано, что ортоцентр H треугольника ABC является центром описанной окружности треугольника $A_1B_1C_1$. Для этой окружности угол B_1HC_1 является центральным, а угол $B_1A_1C_1$ — вписанным. Поскольку оба угла опираются на одну и ту же дугу, то $\angle B_1HC_1 = 2\angle B_1A_1C_1$. Углы BAC и $B_1A_1C_1$ равны как противолежащие углы параллелограмма ABA_1C, поэтому $\angle BOC = 2\angle BAC = 2\angle B_1A_1C_1 = \angle B_1HC_1$. Поскольку $B_1C_1 = 2BC$, то равнобедренные треугольники B_1HC_1 и COB подобны с коэффициентом подобия 2. Поскольку отрезки AH и OM_1 — соответственные высоты подобных треугольников, то $AH = 2OM_1$. ■

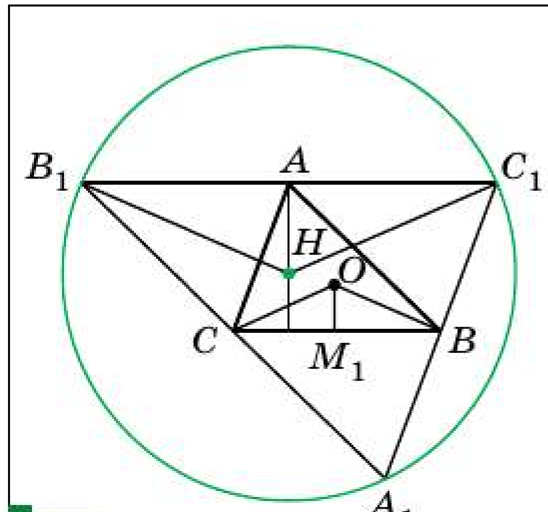


Рис. 17.1

Докажем теперь основную теорему.

Поскольку точка M_1 — середина стороны BC, то отрезок AM_1 — медиана треугольника ABC (рис. 17.2). Пусть M — точка пересечения отрезков AM_1 и HO. Поскольку $AH \parallel OM_1$, то $\angle HAM = \angle OM_1M$. Углы AMH и M_1MO равны как вертикальные. Следовательно, треугольники HAM и OM_1M подобны по первому признаку подобия треугольников. Отсюда $\frac{AM}{MM_1} = \frac{AH}{OM_1} = 2$. Значит, точка M делит медиану AM_1 в отношении $2 : 1$, считая от вершины A. Отсюда точка M — центроид треугольника ABC.

Доказательство для случая тупоугольного треугольника аналогично. ■

Обратим внимание на то, что мы не только установили факт принадлежности точек O, M и H одной прямой, но и доказали равенство

$$HM = 2MO,$$

которое является ещё одним свойством замечательных точек треугольника.

Теорема 17.2

Середины сторон треугольника, основания его высот и середины отрезков, соединяющих вершины треугольника с его ортоцентром, лежат на одной окружности, радиус которой равен $\frac{1}{2}R$, где R — радиус описанной окружности данного треугольника.

Эту окружность называют **окружностью девяти точек**.

Доказательство

Докажем теорему для остроугольного разностороннего треугольника.

В треугольнике ABC точка H — ортоцентр, точка O — центр описанной окружности, точка A_1 — основание высоты, проведённой из вершины A, точка M_1 — середина стороны CB, точка K_1 — середина отрезка AH (рис. 17.3).

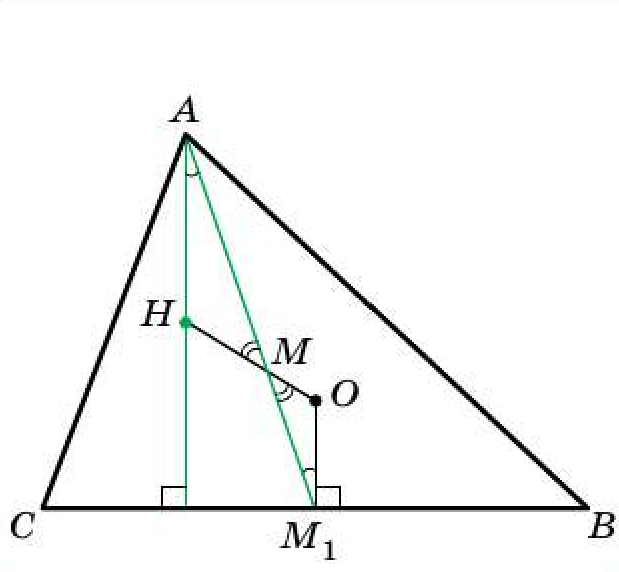


Рис. 17.2

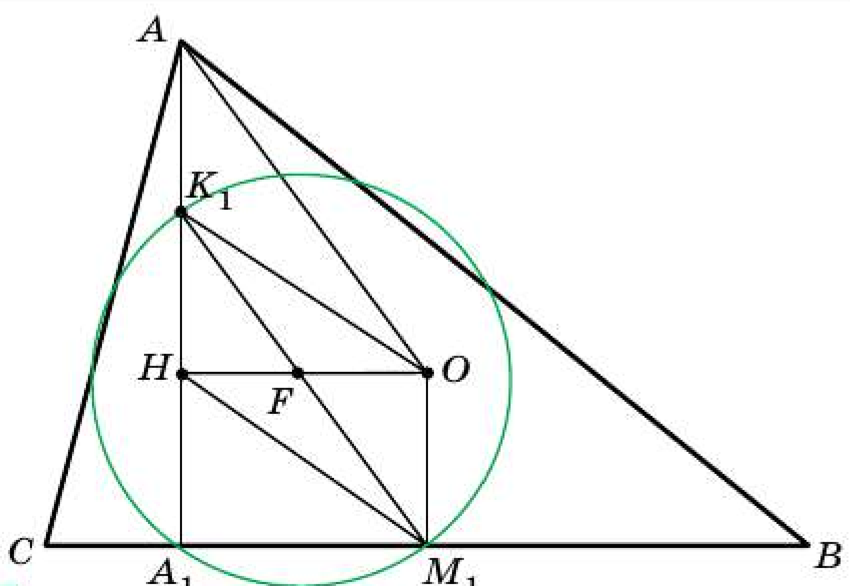


Рис. 17.3

Согласно лемме, $OM_1 = \frac{1}{2}AH = K_1H$. Поскольку $HK_1 \parallel OM_1$, то четырёхугольник HK_1OM_1 — параллелограмм. Пусть диагонали этого параллелограмма пересекаются в точке F.

Заметим, что точка F — середина гипотенузы K_1M_1 прямоугольного треугольника $A_1K_1M_1$. Следовательно, точки K_1, A_1 и M_1 лежат на окружности радиуса FK_1 с центром в точке F.

Очевидно, что четырёхугольник K_1AOM_1 — параллелограмм. Отсюда $K_1M_1 = OA$. Тогда $FK_1 = \frac{1}{2}OA = \frac{1}{2}R$.

Следовательно, мы доказали, что три точки — середина M_1 стороны CB, основание A_1 высоты AA_1 и середина K_1 отрезка HA — лежат на окружности с центром в середине F отрезка HO и радиусом, равным $\frac{1}{2}R$.

Аналогично можно доказать, что две другие тройки точек — B_1, M_2, K_2 и C_1, M_3, K_3, где точки B_1 и C_1 — основания высот BB_1 и CC_1 соответственно, точки M_2 и M_3 — середины сторон AC и AB соответственно, точки K_2 и K_3 — середины отрезков HB и HC соответственно, — лежат на окружности радиуса $\frac{1}{2}R$ с центром F.

Доказательство теоремы для случая тупоугольного треугольника аналогично. ■

?

1. Какие точки называют замечательными точками треугольника?

2. Какие замечательные точки принадлежат одной прямой? Как называют эту прямую?

3. Сформулируйте теорему об окружности девяти точек.

Упражнения

17.1. Даны две точки, лежащие в одной полуплоскости относительно данной прямой. Постройте треугольник, одна из сторон которого лежит на данной прямой, а центр описанной окружности и ортоцентр являются двумя данными точками.

17.2. На плоскости заданы прямая l, которой принадлежат вершины B и C треугольника ABC, точка O, являющаяся центром описанной окружности, и точка M, являющаяся точкой пересечения медиан этого треугольника. Постройте треугольник ABC.

17.3. Постройте треугольник ABC по трём данным точкам: вершине A, ортоцентру H и центру O описанной окружности.

17.4. Постройте треугольник ABC по центру описанной окружности, ортоцентру и середине стороны BC.

17.5. На плоскости заданы точки O, M и B_1, являющиеся соответственно центром описанной окружности, точкой пересечения медиан и основанием высоты BB_1 треугольника ABC. Постройте треугольник ABC.

17.6. Постройте треугольник ABC по его ортоцентру, вершине A и середине стороны BC.

17.7. На плоскости заданы точки O, M и A_1, являющиеся соответственно центром описанной окружности, точкой пересечения медиан и точкой пересечения биссектрисы угла A треугольника ABC с описанной окружностью. Постройте треугольник ABC.

17.8. Постройте треугольник ABC по прямой, содержащей сторону BC, центроиду и точке пересечения описанной окружности с прямой, содержащей высоту, проведённую из вершины A.

17.9. Прямая, содержащая высоту AA_1 треугольника ABC, пересекает описанную окружность этого треугольника в точке D. Найдите расстояние от центра окружности девяти точек треугольника ABC до стороны BC, если $AD = a$.

17.10. Точки O и J — соответственно центры описанной и вписанной окружностей треугольника ABC. Биссектрисы углов A, B и C пересекают описанную окружность в точках A_1, B_1 и C_1 соответственно. Докажите, что прямая OJ содержит точку пересечения медиан треугольника $A_1B_1C_1$.

17.11. Точка H — ортоцентр треугольника ABC. Докажите, что треугольники ABC, ABH, BCH и CAH имеют одну и ту же окружность девяти точек.

17.12. Точка H — ортоцентр треугольника ABC. Докажите, что прямые Эйлера треугольников ABC, ABH, BCH и CAH пересекаются в одной точке.

17.13. Биссектриса угла A остроугольного треугольника ABC перпендикулярна прямой Эйлера этого треугольника. Докажите, что $\angle A = 60°$.

17.14. Биссектриса угла A тупоугольного треугольника ABC параллельна прямой Эйлера этого треугольника. Докажите, что $\angle A = 120°$.

17.15. Даны две окружности. Первая из них проходит через центр O второй окружности и пересекает эту окружность в точках M и N (рис. 17.4). Отрезок AB — диаметр второй окружности. Прямые AM и BN пересекают первую окружность в точках A_1 и B_1 соответственно. Докажите, что $A_1B_1 = \frac{1}{2}AB$.

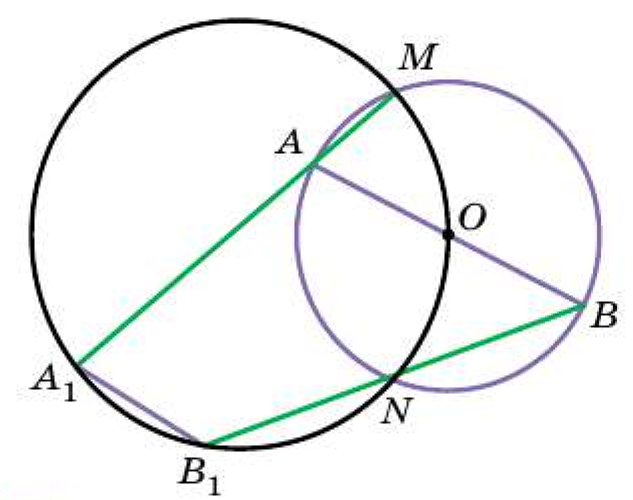


Рис. **17.4**

§ 18 Второй и третий признаки подобия треугольников

Теорема 18.1

(второй признак подобия треугольников: по двум сторонам и углу между ними)

Если две стороны одного треугольника пропорциональны двум сторонам другого треугольника и углы, образованные этими сторонами, равны, то такие треугольники подобны.

Доказательство

Рассмотрим треугольники ABC и $A_1B_1C_1$, в которых $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = k$ и $\angle B = \angle B_1$. Докажем, что $\triangle ABC \backsim \triangle A_1B_1C_1$.

Если $k = 1$, то $AB = A_1B_1$ и $BC = B_1C_1$, а следовательно, треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны по первому признаку равенства треугольников, поэтому эти треугольники подобны.

Пусть, например, $k > 1$, т. е. $AB > A_1B_1$ и $BC > B_1C_1$. На сторонах BA и BC отметим соответственно точки A_2 и C_2 так, что $BA_2 = B_1A_1$ и $BC_2 = B_1C_1$ (рис. 18.1). Тогда $\frac{AB}{BA_2} = \frac{BC}{BC_2}$.

Покажем, что $A_2C_2 \parallel AC$. Предположим, что это не так. Тогда на стороне BC отметим точку M такую, что $A_2M \parallel AC$. Имеем: $\frac{AB}{BA_2} = \frac{BC}{BM}$. Но $\frac{AB}{BA_2} = \frac{BC}{BC_2}$, тогда $\frac{BC}{BC_2} = \frac{BC}{BM}$, т. е. $BC_2 = BM$. Следовательно, буквами M и C_2 обозначена одна и та же точка. Тогда $A_2C_2 \parallel AC$.

По лемме о подобных треугольниках получаем, что $\triangle ABC \sim \triangle A_2BC_2$. Треугольники A_2BC_2 и $A_1B_1C_1$ равны по первому признаку равенства треугольников. Отсюда $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$. ■

Теорема 18.2

(третий признак подобия треугольников: по трём сторонам)

Если три стороны одного треугольника пропорциональны трём сторонам другого треугольника, то такие треугольники подобны.

Доказательство

Рассмотрим треугольники ABC и $A_1B_1C_1$, в которых $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{CA}{C_1A_1} = k$. Докажем, что $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$.

Если $k = 1$, то треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны по третьему признаку равенства треугольников, а следовательно, эти треугольники подобны.

Пусть, например, $k > 1$. На сторонах BA и BC отметим соответственно точки A_2 и C_2 такие, что $BA_2 = B_1A_1$, $BC_2 = B_1C_1$ (рис. 18.2). Тогда $\frac{AB}{BA_2} = \frac{BC}{BC_2} = k$. В треугольниках ABC и A_2BC_2 угол B общий, прилежащие к нему стороны пропорциональны. Следовательно, по второму признаку подобия треугольников эти треугольники подобны, причём коэффициент подобия равен k. Тогда $\frac{CA}{C_2A_2} = k$. Учитывая, что по условию $\frac{CA}{C_1A_1} = k$, получаем: $A_1C_1 = A_2C_2$. Следовательно, треугольники A_2BC_2 и $A_1B_1C_1$ равны по третьему признаку равенства треугольников. С учётом того, что $\triangle ABC \sim \triangle A_2BC_2$, получаем: $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$. ■

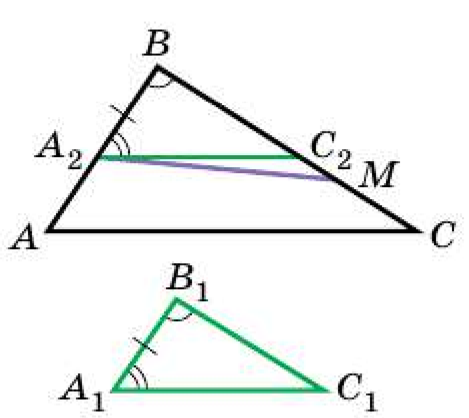


Рис. 18.1

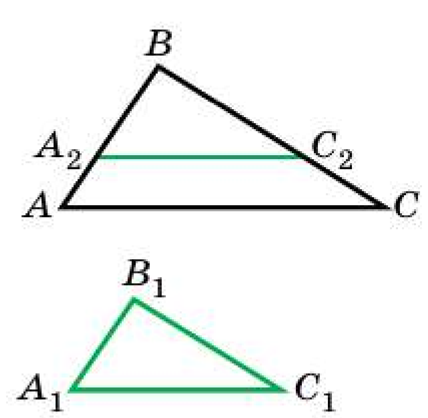


Рис. 18.2

Задача 1. Докажите, что отрезок, соединяющий основания двух высот остроугольного треугольника, отсекает от данного треугольника ему подобный.

Решение. На рисунке 18.3 отрезки AA_1 и CC_1 — высоты треугольника ABC. Докажем, что $\triangle A_1BC_1 \sim \triangle ABC$.

В прямоугольных треугольниках ABA_1 и CBC_1 острый угол B общий. Следовательно, треугольники ABA_1 и CBC_1 подобны по первому признаку подобия треугольников. Отсюда $\frac{AB}{BC} = \frac{BA_1}{BC_1}$. Тогда $\frac{AB}{BA_1} = \frac{BC}{BC_1}$. Угол B — общий для треугольников ABC и A_1BC_1. Следовательно, треугольники ABC и A_1BC_1 подобны по второму признаку подобия треугольников. ■

Задача 2. Отрезки AB и CD пересекаются в точке M. Известно, что $AM \cdot MB = CM \cdot MD$. Докажите, что точки A, B, C и D лежат на одной окружности.

Решение. Рассмотрим треугольники ACM и DMB (рис. 18.4). У них углы AMC и BMD равны как вертикальные. Из условия следует, что $\frac{AM}{MD} = \frac{CM}{MB}$. Таким образом, треугольники ACM и DBM подобны по второму признаку подобия треугольников. Отсюда $\angle ACM = \angle DBM$. Тогда с учётом доказанного в ключевой задаче 1 § 10 точки A, B, C и D лежат на одной окружности. ■

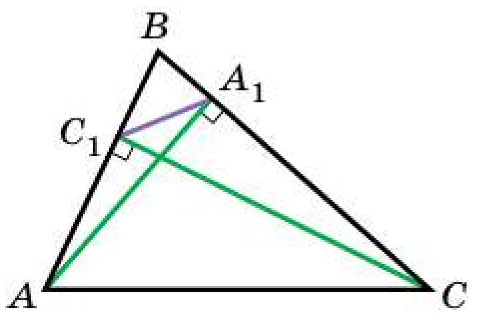


Рис. 18.3

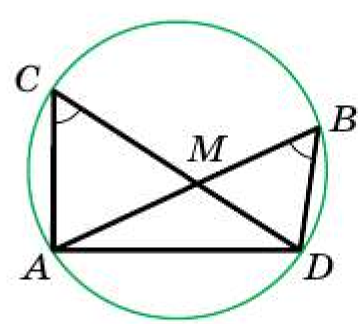


Рис. 18.4

Задача 3. Из точки A проведены два луча AM и AN, не лежащие на одной прямой. На луче AM отметили точки H и B, а на луче AN — точки C и D так, что $AH \cdot AB = AC \cdot AD$. Докажите, что точки H, B, D и C лежат на одной окружности.

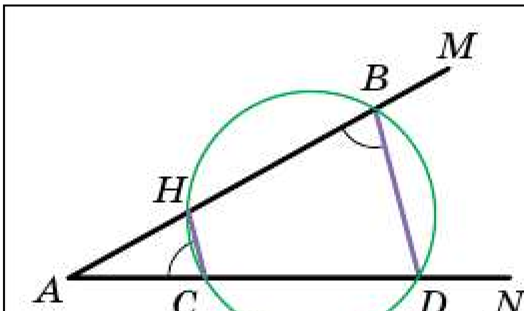


Рис. 18.5

Решение. Рассмотрим треугольники AHC и ADB (рис. 18.5). Угол A у них общий. Из условия следует, что $\frac{AH}{AD} = \frac{AC}{AB}$. Следовательно, треугольники AHC и ADB подобны по второму признаку подобия треугольников. Тогда $\angle ACH = \angle HBD$. Учитывая, что $\angle ACH + \angle HCD = 180°$, получаем $\angle HBD + \angle HCD = 180°$, т. е. около четырёхугольника $HCDB$ можно описать окружность. ■

1. Сформулируйте второй признак подобия треугольников.
2. Сформулируйте третий признак подобия треугольников.

Упражнения

18.1. На сторонах AB и AC треугольника ABC (рис. 18.6) отметили соответственно точки D и E так, что $AD = \frac{4}{7}AC$, $AE = \frac{4}{7}AB$. Найдите отрезок DE, если $BC = 21$ см.

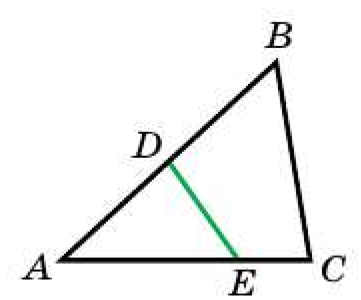


Рис. 18.6

18.2. В треугольнике ABC $AB = 21$ см, $AC = 42$ см, $BC = 28$ см. На продолжениях отрезков AB и BC за точку B отложены соответственно отрезки BM и BK, $BM = 8$ см, $BK = 6$ см (рис. 18.7). Найдите отрезок KM.

18.3. Отрезки AB и CD пересекаются в точке O (рис. 18.8), $AO = 24$ см, $BO = 16$ см, $CO = 15$ см, $OD = 10$ см, $\angle ACO = 72°$. Найдите угол BDO.

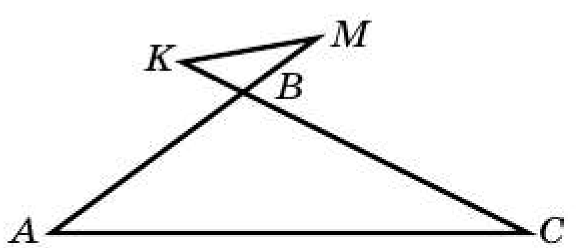


Рис. 18.7

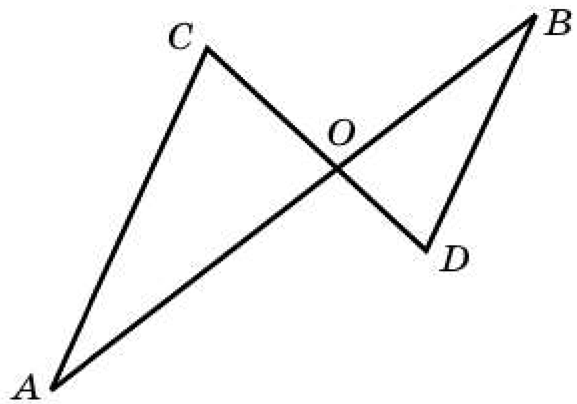


Рис. 18.8

18.4. На сторонах AC и BC треугольника ABC отметили соответственно точки M и K так, что $CM = 15$ см, $CK = 12$ см. Найдите отрезок MK, если $AC = 20$ см, $BC = 25$ см, $AB = 30$ см.

18.5. Подобны ли треугольники ABC и $A_1B_1C_1$, если:
1) $AB = 6$ см, $BC = 10$ см, $AC = 14$ см, $A_1B_1 = 9$ см, $B_1C_1 = 15$ см, $A_1C_1 = 21$ см;
2) $AB = 1{,}3$ см, $BC = 2{,}5$ см, $AC = 3{,}2$ см, $A_1B_1 = 26$ см, $B_1C_1 = 50$ см, $A_1C_1 = 60$ см?

18.6. Подобны ли два треугольника, если стороны одного относятся как $3 : 8 : 9$, а стороны другого равны 24 см, 9 см и 27 см?

18.7. В треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ $\angle A = \angle A_1$, каждая из сторон AB и AC составляет 0,6 сторон A_1B_1 и A_1C_1 соответственно. Найдите стороны BC и B_1C_1, если их сумма равна 48 см.

18.8. В треугольниках DEF и MKN $\angle E = \angle K$, а каждая из сторон DE и EF в 2,5 раза больше сторон MK и KN соответственно. Найдите стороны DF и MN, если их разность равна 30 см.

18.9. Докажите, что в подобных треугольниках медианы, проведённые из вершин соответственных углов, относятся как соответственные стороны.

18.10. На сторонах AB и AC треугольника ABC отметили соответственно точки D и E так, что $AD : DB = AE : EC = 3 : 5$. Найдите отрезок DE, если $BC = 16$ см.

18.11. Из деревянных палочек изготовили три подобных разносторонних треугольника. В каждом из них бóльшую сторону покрасили в синий цвет, а меньшую — в жёлтый. Из синих палочек составили один треугольник, а из жёлтых — другой. Будут ли эти треугольники подобны?

18.12. Два отрезка AB и CD пересекаются в точке M так, что $MA = 6$ см, $MB = 8$ см, $MC = 3$ см, $MD = 16$ см. Лежат ли точки A, B, C и D на одной окружности?

18.13. В треугольнике ABC $AC = A$, $AB = BC = b$, отрезки AM и CK — биссектрисы треугольника. Найдите отрезок MK.

18.14. В треугольнике ABC проведена высота CD (точка D принадлежит стороне AB). Известно, что $CD^2 = AD \cdot DB$. Докажите, что $\angle ACB = 90°$.

18.15. На стороне BC треугольника ABC отметили точку M. Точка E — середина отрезка AM. Прямая CE пересекает сторону AB в точке D. Известно, что $AE^2 = EC \cdot ED$. Докажите, что точки A, D, M и C лежат на одной окружности.

18.16. Окружность, построенная на стороне AC треугольника ABC как на диаметре, проходит через середину M стороны AB и пересекает сторону BC в точке N так, что $BN : NC = 2 : 7$. Найдите отрезок MN, если $AC = 6$ см.

18.17. В треугольнике ABC $AB = 8$ см, $BC = 12$ см, $AC = 16$ см. На стороне AC отметили точку D так, что $CD = 9$ см. Найдите отрезок BD.

18.18. На общей хорде двух пересекающихся окружностей отметили точку M и через неё провели хорды AB и CD (рис. 18.9). Докажите, что $\angle DAB = \angle BCD$.

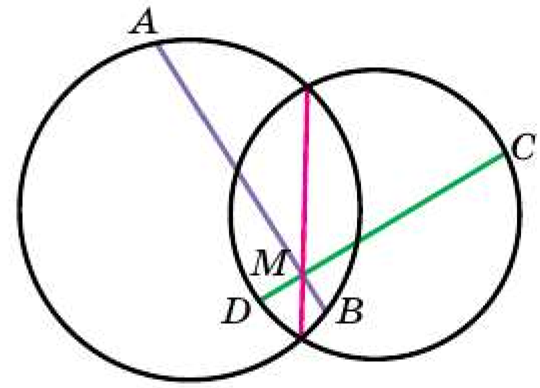


Рис. 18.9

18.19. Точка M лежит вне окружности. На окружности отметили точки A, B и C такие, что $MC^2 = MA \cdot MB$. Докажите, что прямая MC — касательная к окружности.

18.20. В параллелограмме $ABCD$ диагональ AC больше диагонали BD. На диагонали AC отметили точку M так, что четырёхугольник $BCDM$ вписанный. Докажите, что прямая BD является касательной к описанным окружностям треугольников ABM и ADM.

18.21. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AA_1 и CC_1. Точка O — центр окружности, описанной около треугольника ABC. Докажите, что отрезки BO и A_1C_1 перпендикулярны.

18.22. Точка O — центр вписанной окружности треугольника ABC. На сторонах AC и BC отметили соответственно точки M и K так, что $BK \cdot AB = BO^2$ и $AM \cdot AB = AO^2$. Докажите, что точки M, O и K лежат на одной прямой.

18.23. На медиане BM треугольника ABC отметили точку K так, что $\angle MKC = \angle BCM$. Докажите, что $\angle AKM = \angle BAM$.

18.24. В равнобедренном треугольнике ABC ($AB = BC$) провели биссектрису AM. На луче CA отложили отрезок CN, равный отрезку BM. Докажите, что точки A, B, M и N лежат на одной окружности.

18.25. Для сторон треугольника ABC выполняется равенство $BC^2 = AC^2 + AC \cdot AB$. Докажите, что $\angle A = 2\angle B$.

Теорема Фалеса

Если параллельные прямые, пересекающие стороны угла, отсекают на одной его стороне равные отрезки, то они отсекают равные отрезки и на другой его стороне.

Отношение двух отрезков

Отношением двух отрезков называют отношение их длин, выраженных в одних и тех же единицах измерения.

Теорема о пропорциональных отрезках

Если параллельные прямые пересекают стороны угла, то отрезки, образовавшиеся на одной стороне угла, пропорциональны соответствующим отрезкам, образовавшимся на другой стороне угла.

Свойство медиан треугольника

Все три медианы треугольника пересекаются в одной точке, которая делит каждую из них в отношении 2 : 1, считая от вершины треугольника.

Свойство биссектрисы треугольника

Биссектриса треугольника делит сторону, к которой она проведена, на отрезки, пропорциональные прилежащим к ним сторонам.

Подобные треугольники

Два треугольника называют подобными, если их углы соответственно равны и стороны одного треугольника пропорциональны соответственным сторонам другого треугольника.

Лемма о подобных треугольниках

Прямая, параллельная стороне треугольника и пересекающая две другие его стороны, отсекает от данного треугольника ему подобный.

Первый признак подобия треугольников: по двум углам

Если два угла одного треугольника равны двум углам другого треугольника, то такие треугольники подобны.

Второй признак подобия треугольников: по двум сторонам и углу между ними

Если две стороны одного треугольника пропорциональны двум сторонам другого треугольника и углы, образованные этими сторонами, равны, то такие треугольники подобны.

Третий признак подобия треугольников: по трём сторонам

Если три стороны одного треугольника пропорциональны трём сторонам другого треугольника, то такие треугольники подобны.

Свойство пересекающихся хорд

Если хорды AB и CD окружности пересекаются в точке M, то $AM \cdot MB = DM \cdot MC$

Свойство касательной и секущей

Если через точку A к окружности проведены касательная AM (M — точка касания) и прямая (секущая), пересекающая окружность в точках B и C, то $AM^2 = AC \cdot AB$.

Теорема Птолемея

Произведение диагоналей вписанного четырёхугольника равно сумме произведений его противолежащих сторон.

Теорема Менелая

На сторонах AB и BC треугольника ABC отметили соответственно точки C_1 и A_1, а на продолжении стороны AC — точку B_1. Для того чтобы точки A_1, B_1 и C_1 лежали на одной прямой, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство $\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1$.

Теорема Чевы

Для того чтобы чевианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекались в одной точке, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство $\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1$.

Прямая Эйлера

В любом треугольнике центр описанной окружности, центроид и ортоцентр лежат на одной прямой. Эту прямую называют прямой Эйлера.

Окружность девяти точек

Середины сторон треугольника, основания его высот и середины отрезков, соединяющих вершины треугольника с его ортоцентром, лежат на одной окружности, радиус которой равен $\frac{1}{2}R$, где R — радиус описанной окружности данного треугольника. Эту окружность называют окружностью девяти точек.

Глава 4

Решение прямоугольных треугольников

- В этой главе вы изучите формулы, связывающие элементы прямоугольных треугольников. Ознакомитесь со знаменитой теоремой Пифагора, с новым видом функций — тригонометрическими функциями острого угла прямоугольного треугольника.

§ 19 Метрические соотношения в прямоугольном треугольнике

На рисунке 19.1 отрезок CD — высота прямоугольного треугольника ABC ($\angle ACB = 90°$).

Отрезки AD и DB называют **проекциями** катетов AC и CB соответственно на гипотенузу.

Лемма

Высота прямоугольного треугольника, проведённая к гипотенузе, делит треугольник на два подобных прямоугольных треугольника, каждый из которых подобен данному треугольнику.

Докажите лемму самостоятельно.

Теорема 19.1

Квадрат высоты прямоугольного треугольника, проведённой к гипотенузе, равен произведению проекций катетов на гипотенузу. Квадрат катета равен произведению гипотенузы и проекции этого катета на гипотенузу.

Доказательство

На рисунке 19.1 отрезок CD — высота прямоугольного треугольника ABC ($\angle ACB = 90°$). Докажем, что:

$$CD^2 = AD \cdot DB,\quad AC^2 = AB \cdot AD,$$
$$BC^2 = AB \cdot DB.$$

Поскольку $\triangle CBD \sim \triangle ACD$, то $\frac{CD}{AD} = \frac{BD}{CD}$. Отсюда $CD^2 = AD \cdot DB$.

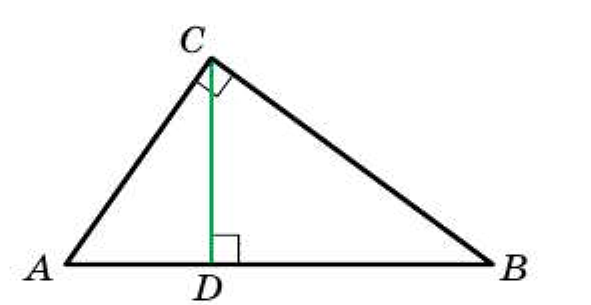


Рис. 19.1

Поскольку $\triangle ABC \backsim \triangle ACD$, то $\frac{AC}{AD} = \frac{AB}{AC}$. Отсюда $AC^2 = AB \cdot AD$.

Поскольку $\triangle ABC \backsim \triangle CBD$, то $\frac{BC}{BD} = \frac{AB}{BC}$. Отсюда $BC^2 = AB \cdot DB$. ■

Доказанные равенства называют **метрическими соотношениями в прямоугольном треугольнике.**

Задача 1. Даны два отрезка, длины которых равны a и b (рис. 19.2). Постройте третий отрезок, длина которого равна $\sqrt{ab}$.

Решение. Рассмотрим треугольник ADC ($\angle ADC = 90°$), в котором отрезок DB является высотой (рис. 19.3). Из теоремы 19.1 следует, что $DB = \sqrt{AB \cdot BC}$. Если обозначить $AB = a$, $BC = b$, то $DB = \sqrt{ab}$.

Проведённый анализ показывает, как провести построение.

На произвольной прямой отметим точку A и отложим последовательно отрезки AB и BC так, чтобы $AB = a$, $BC = b$. Построим окружность с диаметром AC. Через точку B проведём прямую, перпендикулярную прямой AC (см. рис. 19.3). Пусть D — одна из точек пересечения прямой и окружности.

Докажем, что отрезок DB — искомый. Действительно, $\angle ADC = 90°$ как вписанный угол, опирающийся на диаметр AC. Тогда по теореме 19.1 $DB^2 = AB \cdot BC$, т. е. $DB = \sqrt{ab}$. ■

Задача 2. На катете AC прямоугольного треугольника ABC как на диаметре построена полуокружность, пересекающая гипотенузу AB в точке M так, что $AM : MB = 1 : 3$ (рис. 19.4). Найдите острые углы треугольника ABC.

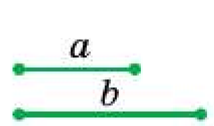


Рис. 19.2

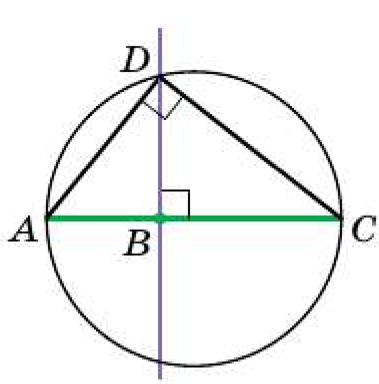


Рис. 19.3

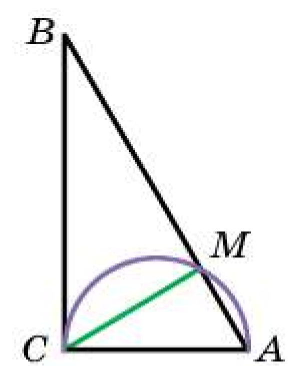


Рис. 19.4

Решение. Поскольку угол CMA вписанный, опирающийся на диаметр, то $CM \perp MA$.

Пусть $AM = x$, тогда $MB = 3x$. По теореме 19.1 $AC^2 = AM \cdot AB$, т. е. $AC^2 = x \cdot 4x$. Отсюда $AC = 2x$. Получили, что в прямоугольном треугольнике ABC катет AC в 2 раза меньше гипотенузы. Отсюда $\angle ABC = 30°$, $\angle BAC = 60°$. ■

Ответ: 30°, 60°. ■

1. Какой формулой связаны высота прямоугольного треугольника, проведённая к гипотенузе, и проекции катетов на гипотенузу?

2. Какой формулой связаны катет, гипотенуза и проекция этого катета на гипотенузу?

Упражнения

19.1. Найдите высоту прямоугольного треугольника, проведённую из вершины прямого угла, если она делит гипотенузу на отрезки длиной 2 см и 18 см.

19.2. Катет прямоугольного треугольника равен 6 см, а его проекция на гипотенузу — 4 см. Найдите гипотенузу.

19.3. Высота прямоугольного треугольника, проведённая к гипотенузе, делит её на отрезки длиной 5 см и 20 см. Найдите катеты треугольника.

19.4. Высота прямоугольного треугольника, проведённая из вершины прямого угла, равна 48 см, а проекция одного из катетов на гипотенузу — 36 см. Найдите стороны данного треугольника.

19.5. Найдите катеты прямоугольного треугольника, высота которого делит гипотенузу на отрезки, один из которых на 3 см меньше этой высоты, а другой — на 4 см больше высоты.

19.6. Найдите меньший катет прямоугольного треугольника и его высоту, проведённую к гипотенузе, если больший катет меньше гипотенузы на 10 см и больше своей проекции на гипотенузу на 8 см.

19.7. Перпендикуляр, опущенный из точки пересечения диагоналей ромба на его сторону, равен 2 см и делит эту сторону на отрезки, относящиеся как 1 : 4. Найдите диагонали ромба.

19.8. Перпендикуляр, опущенный из точки окружности на диаметр, делит его на два отрезка, один из которых равен 4 см. Найдите радиус окружности, если длина перпендикуляра равна 10 см.

19.9. Прямые, касающиеся окружности с центром O в точках A и B, пересекаются в точке M. Найдите хорду AB, если она делит отрезок MO на отрезки длиной 2 см и 18 см.

19.10. Найдите периметр равнобокой трапеции, основания которой равны 7 см и 25 см, а диагонали перпендикулярны боковым сторонам.

19.11. Центр окружности, описанной около равнобокой трапеции, принадлежит её большему основанию. Найдите радиус этой окружности, если диагональ трапеции равна 20 см, а проекция диагонали на большее основание — 16 см.

19.12. Диагональ равнобокой трапеции перпендикулярна боковой стороне, которая равна 12 см. Найдите среднюю линию трапеции, если радиус окружности, описанной около трапеции, равен 10 см.

19.13. Найдите высоту равнобокой трапеции, если её диагональ перпендикулярна боковой стороне, а разность квадратов оснований равна 25.

19.14. В прямоугольном треугольнике ABC проведена высота из вершины C прямого угла. На этой высоте как на диаметре построена окружность, отсекающая на катетах отрезки длиной 12 см и 18 см. Найдите катеты треугольника ABC.

19.15. Один из катетов прямоугольного треугольника равен 15 см, а проекция другого катета на гипотенузу равна 16 см. Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник.

19.16. Диагонали прямоугольной трапеции перпендикулярны, точка пересечения делит бóльшую из них на отрезки длиной 4 см и 9 см. Найдите меньшую диагональ трапеции.

19.17. Даны два отрезка, длины которых равны a и b. Постройте отрезок длиной $\sqrt{\frac{ab}{2}}$.

19.18. Постройте прямоугольный треугольник по гипотенузе и проекции одного из катетов на гипотенузу.

19.19. Окружность, вписанная в трапецию $ABCD$, касается боковых сторон AB и CD трапеции соответственно в точках K и M. Докажите, что $AK \cdot KB = CM \cdot MD$.

19.20. В трапецию вписана окружность радиуса 6 см. Точка касания делит одно из оснований на отрезки длиной 9 см и 12 см. Найдите стороны трапеции.

19.21. В равнобокую трапецию можно вписать окружность. Докажите, что квадрат высоты этой трапеции равен произведению её оснований.

19.22. В прямоугольную трапецию вписана окружность. Точка касания делит бóльшую боковую сторону на отрезки длиной 8 см и 50 см. Найдите периметр трапеции.

19.23. В равнобокую трапецию вписана окружность. Точка касания делит боковую сторону на отрезки длиной 3 см и 27 см. Найдите высоту трапеции.

19.24. Высота ромба, проведённая из вершины тупого угла, делит его бо́льшую диагональ на отрезки длиной 3,5 см и 12,5 см. Найдите меньшую диагональ ромба.

19.25. На высотах BB_1 и CC_1 остроугольного треугольника ABC отметили соответственно точки B_2 и C_2 так, что $\angle AB_2C = \angle AC_2B = 90°$. Докажите, что $AB_2 = AC_2$.

§ 20 Теорема Пифагора

Теорема 20.1

(теорема Пифагора)

В прямоугольном треугольнике квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов.

Доказательство

На рисунке 20.1 изображён прямоугольный треугольник ABC ($\angle ACB = 90°$). Докажем, что $AB^2 = AC^2 + BC^2$.

Проведём высоту CD. Применив теорему 19.1 для катетов AC и BC, получаем: $AC^2 = AB \cdot AD$ и $BC^2 = AB \cdot DB$. Сложив почленно эти равенства, получим: $AC^2 + BC^2 = AB \cdot AD + AB \cdot DB$.

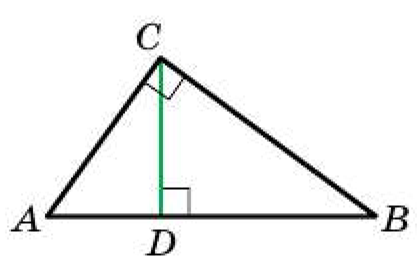


Рис. 20.1

Далее имеем: $AC^2 + BC^2 = AB \cdot (AD + DB) = AB^2$. ■

Если в прямоугольном треугольнике длины катетов равны a и b, а длина гипотенузы равна c, то теорему Пифагора можно выразить следующим равенством:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

Теорема Пифагора позволяет по двум сторонам прямоугольного треугольника найти его третью сторону:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}; \quad a = \sqrt{c^2 - b^2}; \quad b = \sqrt{c^2 - a^2}$$

Из равенства $c^2 = a^2 + b^2$ также следует, что $c^2 > a^2$ и $c^2 > b^2$, отсюда $c > a$ и $c > b$, т. е. ***гипотенуза больше любого из катетов***.

Задача. В окружности радиуса R проведены две перпендикулярные пересекающиеся хорды AB и CD (рис. 20.2). Докажите, что $AC^2 + BD^2 = 4R^2$.

Решение. Отметим на окружности такую точку K, что $\cup BK = \cup AC$ (рис. 20.2). Тогда $AC = KB$ и $\angle ADC = \angle KDB$. Заметим, что углы DAB и DKB равны как вписанные, опирающиеся на одну и ту же дугу BD. Поскольку $AB \perp CD$, то $\angle ADC + \angle DAB = 90°$. Тогда $\angle KDB + \angle DKB = 90°$. Следовательно, $\angle KBD = 90°$ и отрезок KD — диаметр окружности.

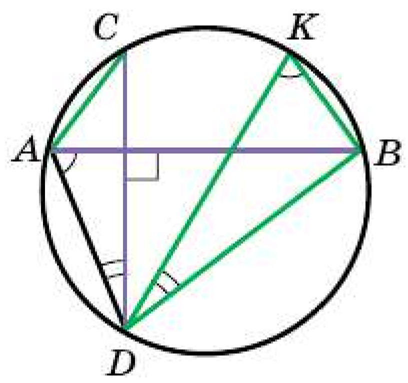


Рис. 20.2

По теореме Пифагора $KB^2 + BD^2 = KD^2$ или $AC^2 + BD^2 = 4R^2$. ■

?

1. Сформулируйте теорему Пифагора.
2. Запишите теорему Пифагора, если катеты прямоугольного треугольника равны a и b, а гипотенуза равна c.
3. Как по двум сторонам прямоугольного треугольника найти его третью сторону?
4. Какая из сторон прямоугольного треугольника является наибольшей?

Упражнения

20.1. Найдите гипотенузу прямоугольного треугольника, если его катеты равны: 1) 3 см и 4 см; 2) 6 см и 9 см.

20.2. Найдите катет прямоугольного треугольника, если его гипотенуза и другой катет соответственно равны: 1) 15 см и 12 см; 2) 7 см и $\sqrt{13}$ см.

20.3. Боковая сторона равнобедренного треугольника равна 29 см, а высота, проведённая к основанию, — 21 см. Чему равно основание треугольника?

20.4. Высота равнобедренного треугольника, проведённая к основанию, равна 35 см, а его основание — 24 см. Чему равна боковая сторона треугольника?

20.5. В окружности, радиус которой равен 10 см, проведена хорда длиной 16 см. Найдите расстояние от центра окружности до данной хорды.

20.6. Найдите периметр ромба, диагонали которого равны 24 см и 32 см.

20.7. Сторона ромба равна 26 см, а одна из диагоналей — 48 см. Найдите другую диагональ ромба.

20.8. Один из катетов прямоугольного треугольника равен 21 см, а другой катет на 7 см меньше гипотенузы. Найдите периметр треугольника.

20.9. Гипотенуза прямоугольного треугольника равна 26 см, а катеты относятся как 5 : 12. Найдите катеты этого треугольника.

20.10. Катет прямоугольного треугольника равен 6 см, а медиана, проведённая к нему, — 5 см. Найдите гипотенузу треугольника.

20.11. В треугольнике ABC $BC = 20$ см, высота BD делит сторону AC на отрезки $AD = 5$ см и $CD = 16$ см. Найдите сторону AB.

20.12. В треугольнике ABC $AB = 17$ см, $BC = 9$ см, угол C тупой, высота AD равна 8 см. Найдите сторону AC.

20.13. Найдите высоту равностороннего треугольника со стороной a.

20.14. Найдите диагональ квадрата со стороной a.

20.15. Найдите длину неизвестного отрезка x на рисунке 20.3 (длины отрезков даны в сантиметрах).

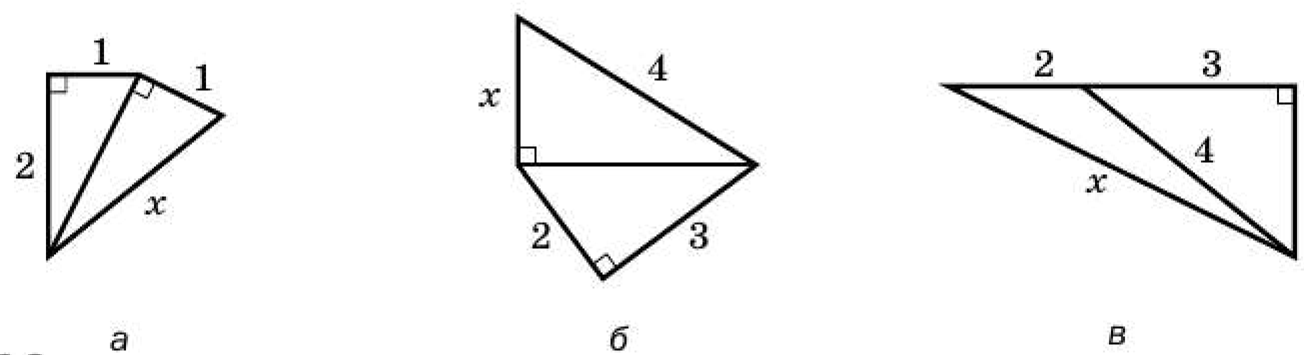


Рис. **20.3**

20.16. Найдите длину неизвестного отрезка x на рисунке 20.4 (длины отрезков даны в сантиметрах).

Рис. **20.4**

20.17. В равнобедренном треугольнике высота, проведённая к боковой стороне, равна 8 см. Она делит боковую сторону на два отрезка, один из которых, прилежащий к вершине равнобедренного треугольника, равен 6 см. Найдите основание треугольника.

20.18. Высота равнобедренного треугольника, опущенная на боковую сторону, делит её на отрезки длиной 4 см и 16 см, считая от вершины угла при основании. Найдите основание равнобедренного треугольника.

20.19. Основание равнобедренного тупоугольного треугольника равно 24 см, а радиус окружности, описанной около него, — 13 см. Найдите боковую сторону треугольника.

20.20. Высота равнобедренного остроугольного треугольника, проведённая к его основанию, равна 8 см, а радиус окружности, описанной около него, — 5 см. Найдите боковую сторону треугольника.

20.21. Из точки, удалённой от прямой на 5 см, проведены к этой прямой две наклонные длиной $5\sqrt{5}$ см и $\sqrt{89}$ см. Найдите расстояние между основаниями наклонных.

20.22. Из точки к прямой проведены две наклонные, длины которых относятся как 5 : 6, а проекции этих наклонных на прямую равны 7 см и 18 см. Найдите расстояние от данной точки до этой прямой.

20.23. Из точки к прямой проведены две наклонные длиной 15 см и 27 см. Сумма длин проекций этих наклонных на прямую равна 24 см. Найдите проекцию каждой наклонной.

◆ ◆

20.24. Стороны треугольника равны 29 см, 25 см и 6 см. Найдите высоту треугольника, проведённую к меньшей стороне.

20.25. Стороны треугольника равны 36 см, 29 см и 25 см. Найдите высоту треугольника, проведённую к большей стороне.

20.26. Точка касания окружности, вписанной в прямоугольный треугольник, делит один из его катетов на отрезки 2 см и 6 см. Найдите стороны треугольника.

20.27. Найдите стороны параллелограмма, диагонали которого равны 16 см и 20 см, если одна из диагоналей перпендикулярна его стороне.

20.28. Найдите периметр прямоугольного треугольника, если биссектриса прямого угла делит гипотенузу на отрезки длиной 30 см и 40 см.

20.29. Найдите периметр прямоугольного треугольника, если биссектриса острого угла делит противолежащий катет на отрезки длиной 24 см и 51 см.

20.30. Дан отрезок длины 1. Постройте отрезок, равный: 1) $\sqrt{2}$; 2) $\sqrt{5}$; 3) $\sqrt{7}$.

20.31. Дан отрезок длины 1. Постройте отрезок, равный: 1) $\sqrt{3}$; 2) $\sqrt{6}$.

20.32. Основания равнобокой трапеции равны 12 см и 20 см, а диагональ является биссектрисой тупого угла трапеции. Найдите эту диагональ.

20.33. Основания прямоугольной трапеции равны 18 см и 12 см, а диагональ является биссектрисой острого угла трапеции. Найдите эту диагональ.

20.34. В окружности по разные стороны от её центра проведены две параллельные хорды длиной 16 см и 32 см. Расстояние между хордами равно 16 см. Найдите радиус окружности.

20.35. В окружности по одну сторону от её центра проведены две параллельные хорды длиной 48 см и 24 см. Расстояние между хордами равно 12 см. Найдите радиус окружности.

20.36. Радиус окружности, вписанной в равнобедренный треугольник, равен 12 см, а расстояние от вершины равнобедренного треугольника до центра окружности — 20 см. Найдите периметр данного треугольника.

20.37. Точка касания окружности, вписанной в прямоугольную трапецию, делит её большее основание на отрезки длиной 20 см и 25 см. Вычислите периметр трапеции.

20.38. Точка касания окружности, вписанной в прямоугольную трапецию, делит её меньшее основание на отрезки длиной 6 см и 3 см. Вычислите периметр трапеции.

20.39. Катеты прямоугольного треугольника равны 18 см и 24 см. Найдите биссектрису треугольника, проведённую из вершины меньшего острого угла.

20.40. Медианы AM и CK треугольника ABC перпендикулярны. Найдите стороны треугольника, если $AM = 9$ см и $CK = 12$ см.

20.41. В треугольнике ABC медианы BM и CK перпендикулярны и пересекаются в точке O. Найдите отрезок AO, если $BM = 36$ см и $CK = 15$ см.

20.42. Докажите, что для любой точки X окружности, описанной около прямоугольника $ABCD$, сумма $XA^2 + XB^2 + XC^2 + XD^2$ является величиной постоянной.

20.43. Через точку A, лежащую вне окружности, проведены к ней касательная и секущая. Расстояние от точки A до точки касания равно 16 см, а до одной из точек пересечения секущей с окружностью — 32 см. Найдите радиус окружности, если секущая удалена от её центра на 5 см.

20.44. Докажите, что если в трапеции диагонали перпендикулярны, то сумма квадратов диагоналей равна квадрату суммы оснований.

20.45. Около треугольника ABC описана окружность. Касательная к этой окружности, проведённая в точке B, перпендикулярна стороне AC. Найдите сторону AC, если $AB = 20$ см, $BC = 15$ см.

20.46. Точка H — ортоцентр треугольника ABC, R — радиус его описанной окружности. Докажите, что $AH^2 = 4R^2 - BC^2$.

20.47. В прямоугольном треугольнике ABC ($\angle C = 90°$) $AC = 1$ см, $BC = 3$ см. На сторонах BC и AB как на гипотенузах во внешнюю сторону построены равнобедренные прямоугольные треугольники BKC и BDA. Найдите отрезок KD.

20.48. На гипотенузе AB равнобедренного прямоугольного треугольника ABC отметили точки M и N так, что $\angle MCN = 45°$ ($AM < AN$). Докажите, что $AM^2 + BN^2 = MN^2$.

Пифагор (VI в. до н. э.)

Вы изучили знаменитую теорему, которая носит имя выдающегося древнегреческого учёного Пифагора.
Исследования древних текстов свидетельствуют о том, что утверждение этой теоремы было известно задолго до Пифагора. Почему же её приписывают Пифагору? Скорее всего, потому, что именно Пифагор нашёл доказательство этого утверждения.
О жизни Пифагора мало что известно достоверно. Он родился на греческом острове Самос. По преданиям, он много путешествовал, приобретая знания и мудрость.
Поселившись в греческой колонии Кротон (на юге Италии), он окружил себя преданными учениками и единомышленниками. Так возник пифагорейский союз (или пифагорейское братство). Влияние этого союза было столь велико, что даже спустя столетия после смерти Пифагора многие выдающиеся математики Древнего мира называли себя пифагорейцами.
Больше узнать о научном наследии этого великого учёного вы сможете, если примете участие в реализации проекта «Пифагор и его великая теорема».

§ 21 Тригонометрические функции острого угла прямоугольного треугольника

На рисунке 21.1 изображён прямоугольный треугольник ABC ($\angle C = 90°$). Напомним, что катет BC называют **противолежащим** углу A, а катет AC — **прилежащим** к этому углу.

Определение

Синусом острого угла прямоугольного треугольника называют отношение противолежащего катета к гипотенузе.

Синус угла A обозначают так: $\sin A$ (читают: «синус A»). Для острых углов A и B прямоугольного треугольника ABC имеем:

$$\sin A = \frac{BC}{AB}, \quad \sin B = \frac{AC}{AB}.$$

Для прямоугольного треугольника, изображённого на рисунке 21.2, можно записать: $\sin\alpha = \dfrac{a}{c}$, $\sin\beta = \dfrac{b}{c}$.

Рассмотрим равнобедренный прямоугольный треугольник ABC ($\angle C = 90°$), в котором $AC = BC = a$ (рис. 21.3).

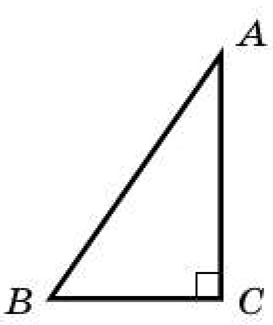


Рис. 21.1

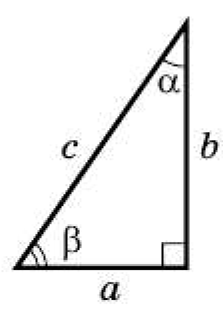


Рис. 21.2

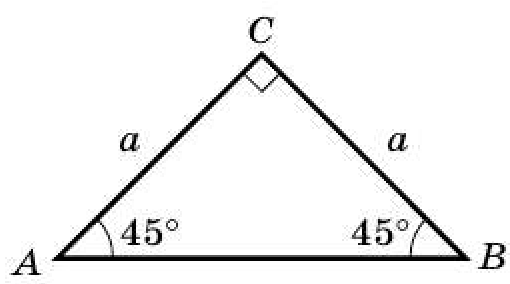


Рис. 21.3

Имеем: $AB = \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2}$.

По определению $\sin A = \dfrac{BC}{AB}$, отсюда $\sin A = \dfrac{a}{a\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Видим, что синус острого угла равнобедренного прямоугольного треугольника не зависит от размеров треугольника, так как полученное значение синуса одинаково для всех значений a. Поскольку $\angle A = 45°$, то $\sin 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Эту запись не связывают с конкретным прямоугольным равнобедренным треугольником.

Вообще, *если острый угол одного прямоугольного треугольника равен острому углу другого прямоугольного треугольника, то синусы этих углов равны*.

Действительно, эти прямоугольные треугольники подобны по первому признаку подобия треугольников. Поэтому отношение катета к гипотенузе одного треугольника равно отношению соответственного катета к гипотенузе другого треугольника.

Например, запись $\sin 17^\circ$ можно отнести ко всем углам, градусные меры которых равны 17°. Значение этого синуса можно вычислить один раз, выбрав произвольный прямоугольный треугольник с острым углом 17°.

Следовательно, ***синус острого угла зависит только от величины этого угла***.

Определение

Косинусом острого угла прямоугольного треугольника называют отношение прилежащего катета к гипотенузе.

Косинус угла A обозначают так: $\cos A$ (читают: «косинус A»).

Для острых углов A и B прямоугольного треугольника ABC (см. рис. 21.1) можно записать:

$$\cos A = \frac{AC}{AB}, \ \cos B = \frac{BC}{AB}.$$

Отметим, что каждый катет прямоугольного треугольника меньше его гипотенузы, а потому *синус и косинус острого угла меньше* 1.

Определение

Тангенсом острого угла прямоугольного треугольника называют отношение противолежащего катета к прилежащему катету.

Тангенс угла A обозначают так: $\operatorname{tg} A$ (читают: «тангенс A»).

Для острых углов A и B прямоугольного треугольника ABC (см. рис. 21.1) можно записать:

$$\operatorname{tg} A = \frac{BC}{AC}, \ \operatorname{tg} B = \frac{AC}{BC}.$$

Определение

Котангенсом острого угла прямоугольного треугольника называют отношение прилежащего катета к противолежащему катету.

Котангенс угла A обозначают так: $\operatorname{ctg} A$ (читают: «котангенс A»).

Для острых углов A и B прямоугольного треугольника ABC (см. рис. 21.1) можно записать:

$$\operatorname{ctg} A = \frac{AC}{BC}, \ \operatorname{ctg} B = \frac{BC}{AC}.$$

Для прямоугольного треугольника, изображённого на рисунке 21.2, записывают: $\cos\alpha = \frac{b}{c}$, $\cos\beta = \frac{a}{c}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}$, $\operatorname{tg}\beta = \frac{b}{a}$, $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{b}{a}$, $\operatorname{ctg}\beta = \frac{a}{b}$.

Как было установлено, синус угла зависит только от величины угла. Рассуждая аналогично, можно прийти к следующему выводу: ***косинус, тангенс и котангенс острого угла зависят только от величины этого угла.***

Вообще, *каждому острому углу а соответствует единственное число — значение синуса (косинуса, тангенса, котангенса) этого угла*. Поэтому зависимость значения синуса (косинуса, тангенса, котангенса) острого угла от величины этого угла является функциональной. Функцию, соответствующую этой зависимости, называют **тригонометрической**. Так, $y = \sin\alpha$, $y = \cos\alpha$, $y = \operatorname{tg}\alpha$, $y = \operatorname{ctg}\alpha$ — тригонометрические функции, аргументами которых являются острые углы.

С древних времён люди составляли таблицы приближённых значений тригонометрических функций с некоторым шагом, один раз вычисляя значения тригонометрических функций для конкретного аргумента. Затем эти таблицы широко использовались во многих областях науки и техники.

В наше время значения тригонометрических функций острых углов удобно находить с помощью калькулятора.

Тангенс и котангенс острого угла можно выразить через синус и косинус этого же угла. Рассмотрим прямоугольный треугольник (см. рис. 21.2). Запишем: $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{c}} = \frac{a}{b} = \operatorname{tg}\alpha$, $\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\frac{b}{c}}{\frac{a}{c}} = \frac{b}{a} = \operatorname{ctg}\alpha$.

Следовательно, получаем такие формулы:

$$\boxed{\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}, \ \operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}}$$

Заметим, что тангенс и котангенс одного и того же острого угла являются взаимно обратными числами, т. е. имеет место равенство:

$$\boxed{\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1}$$

По теореме Пифагора $a^2 + b^2 = c^2$. Обе части этого равенства разделим на c^2. Имеем: $\left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = 1$. Учитывая, что $\sin\alpha = \frac{a}{c}$, $\cos\alpha = \frac{b}{c}$, получим:

$$(\sin\alpha)^2 + (\cos\alpha)^2 = 1.$$

Принято записывать: $(\sin\alpha)^2 = \sin^2\alpha$, $(\cos\alpha)^2 = \cos^2\alpha$. Отсюда имеем:

$$\boxed{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1}$$

Эту формулу называют **основным тригонометрическим тождеством.**

Отметим, что $\cos\beta = \sin\alpha = \frac{a}{c}$, $\sin\beta = \cos\alpha = \frac{b}{c}$, $\operatorname{tg}\beta = \operatorname{ctg}\alpha = \frac{b}{a}$, $\operatorname{ctg}\beta = \operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}$. Поскольку $\beta = 90° - \alpha$, то получаем такие формулы:

$$\boxed{\begin{gathered}\cos(90° - \alpha) = \sin\alpha \\ \sin(90° - \alpha) = \cos\alpha \\ \operatorname{tg}(90° - \alpha) = \operatorname{ctg}\alpha \\ \operatorname{ctg}(90° - \alpha) = \operatorname{tg}\alpha\end{gathered}}$$

Мы уже знаем, что $\sin 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Найдём теперь $\cos 45°$, $\operatorname{tg} 45°$ и $\operatorname{ctg} 45°$. Имеем:

$$\cos 45° = \sin(90° - 45°) = \sin 45° = \frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\operatorname{tg} 45° = \frac{\sin 45°}{\cos 45°} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 1;\ \operatorname{ctg} 45° = \frac{1}{\operatorname{tg} 45°} = 1.$$

Найдём синус, косинус, тангенс и котангенс углов 30° и 60°.

Рассмотрим прямоугольный треугольник ABC, в котором $\angle C = 90°$, $\angle A = 30°$ (рис. 21.4).

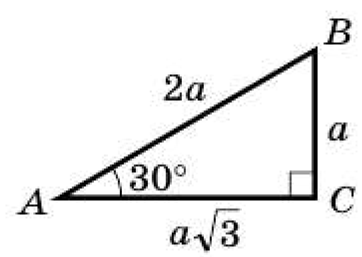


Рис. 21.4

Пусть $BC = a$. Тогда по свойству катета, лежащего против угла 30°, получаем, что

$AB = 2a$. Из теоремы Пифагора следует, что $AC^2 = AB^2 - BC^2$. Имеем: $AC^2 = 4a^2 - a^2 = 3a^2$; $AC = a\sqrt{3}$. Отсюда находим:

$$\sin 30^\circ = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2}, \quad \cos 30^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{a}{a\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}, \quad \operatorname{ctg} 30^\circ = \frac{1}{\operatorname{tg} 30^\circ} = \sqrt{3}.$$

Поскольку $60^\circ = 90^\circ - 30^\circ$, то получаем:

$$\sin 60^\circ = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \cos 60^\circ = \sin 30^\circ = \frac{1}{2},$$

$$\operatorname{tg} 60^\circ = \operatorname{ctg} 30^\circ = \sqrt{3}, \quad \operatorname{ctg} 60^\circ = \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Значение синуса, косинуса, тангенса и котангенса для углов 30°, 45° и 60° полезно запомнить.

α	30°	45°	60°
$\sin\alpha$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\operatorname{tg}\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
$\operatorname{ctg}\alpha$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

Задача. Докажите, что для всех трапеций с общей боковой стороной, вписанных в одну и ту же окружность, отношение высоты к средней линии постоянно.

Решение. Четырёхугольник $ABCD$ — одна из трапеций, о которых говорится в задаче (рис. 21.5). Её боковая сторона AB является общей для всех трапеций.

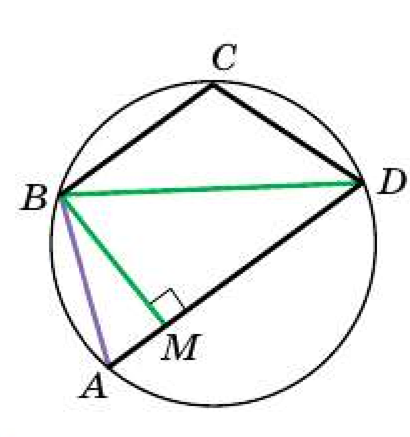


Рис. 21.5

Пусть $\angle ADB = \alpha$. Тогда во всех трапециях угол между диагональю и бóльшим основанием равен α. Проведём высоту BM трапеции. Отрезок MD равен средней линии трапеции (см. ключевую задачу 1 § 7).

Имеем: $\frac{BM}{MD} = \operatorname{tg} \alpha$. Следовательно, для всех рассматриваемых трапеций отношение высоты к средней линии равно $\operatorname{tg} \alpha$. ■

1. Что называют синусом острого угла прямоугольного треугольника?
2. Что называют косинусом острого угла прямоугольного треугольника?
3. Что называют тангенсом острого угла прямоугольного треугольника?
4. Что называют котангенсом острого угла прямоугольного треугольника?
5. Какое равенство называют основным тригонометрическим тождеством?
6. Чему равен $\cos(90° - \alpha)$, $\sin(90° - \alpha)$, $\operatorname{tg}(90° - \alpha)$, $\operatorname{ctg}(90° - \alpha)$?
7. От чего зависят синус, косинус, тангенс и котангенс угла?

Упражнения

21.1. Катет и гипотенуза прямоугольного треугольника соответственно равны 8 см и 10 см. Найдите:
1) синус угла, противолежащего меньшему катету;
2) косинус угла, прилежащего к большему катету;
3) тангенс угла, противолежащего меньшему катету;
4) котангенс угла, прилежащего к большему катету.

21.2. Катеты прямоугольного треугольника равны 3 см и 2 см. Найдите:
1) тангенс угла, прилежащего к большему катету;
2) синус угла, противолежащего меньшему катету;
3) косинус угла, прилежащего к большему катету;
4) котангенс угла, противолежащего большему катету.

21.3. Найдите значение выражения:
1) $\cos^2 45° + \operatorname{tg}^2 60°$;
2) $2\cos^2 60° - \sin^2 30° + \sin 60° \operatorname{ctg} 60°$.

21.4. Найдите значение выражения:
1) $\cos^2 30° - \sin^2 45°$;
2) $3\operatorname{tg}^2 30° + 4\operatorname{tg} 45° + \cos 30° \operatorname{ctg} 30°$.

21.5. В треугольнике ABC $\angle C = 90°$, $BC = 77$ см, $AB = 125$ см. Найдите синусы острых углов треугольника.

21.6. В треугольнике ABC $\angle C = 90°$, $BC = 41$ см, $AC = 20$ см. Найдите косинусы острых углов треугольника.

21.7. Найдите $\sin\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$, если $\cos\alpha = \frac{1}{3}$.

21.8. Найдите $\cos\beta$, $\operatorname{tg}\beta$ и $\operatorname{ctg}\beta$, если $\sin\beta = \frac{4}{5}$.

21.9. Основание равнобедренного треугольника равно 24 см, а боковая сторона — 13 см. Найдите синус, косинус, тангенс и котангенс угла между боковой стороной треугольника и высотой, проведённой к его основанию.

21.10. Боковая сторона равнобедренного треугольника равна 17 см, а высота, проведённая к основанию, — 8 см. Найдите синус, косинус, тангенс и котангенс угла при основании треугольника.

21.11. Найдите углы ромба, диагонали которого равны 4 см и $4\sqrt{3}$ см.

21.12. Найдите углы между диагональю прямоугольника и его сторонами, длины которых равны $\sqrt{3}$ см и 3 см.

21.13. В равнобокой трапеции $ABCD$ $AB = CD = 9$ см, $BC = 10$ см, $AD = 14$ см. Найдите синус, косинус, тангенс и котангенс угла A трапеции.

21.14. В прямоугольной трапеции $ABCD$ $BC \parallel AD$, $\angle A = 90°$, $AB = 4$ см, $BC = 8$ см, $AD = 12$ см. Найдите углы трапеции, прилежащие к её большей боковой стороне.

21.15. Может ли синус угла быть равным: 1) $\sqrt{2}$; 2) $\frac{\sqrt{3}}{3}$?

21.16. Докажите, что тангенсы острых углов прямоугольного треугольника являются взаимно обратными числами.

21.17. Докажите тождество:

1) $1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$; 2) $1 + \operatorname{ctg}^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}$.

21.18. Найдите значение выражения:

1) $\sin^2 18° + \sin^2 72°$; 2) $\cos^3 36° - \sin^3 54°$.

◆ ◆

21.19. Катеты прямоугольного треугольника равны 30 см и 40 см. Найдите синус, косинус, тангенс и котангенс угла между медианой и высотой, проведёнными к гипотенузе.

21.20. В треугольнике ABC $AB = BC$, BD и AM — высоты треугольника, $BD : AM = 3 : 1$. Найдите $\cos C$.

21.21. В треугольнике ABC $AB = BC$, BD и CK — высоты треугольника, $\cos A = \frac{3}{7}$. Найдите отношение $CK : BD$.

21.22. Докажите, что радиус вписанной окружности треугольника ABC можно вычислить по формуле $r = (p - BC)\operatorname{tg}\frac{A}{2}$, где p — полупериметр треугольника ABC.

◆ ◆ ◆

21.23. Докажите, что углы ABC и DEF, изображённые на рисунке 21.6, равны.

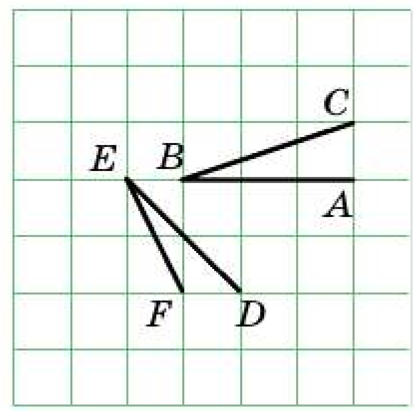


Рис. **21.6**

21.24. В равнобедренном треугольнике ABC отношение высоты BD к основанию AC равно $\sqrt{3}$. На стороне BC отметили точку M так, что $BM : MC = 1 : 2$. Найдите угол MAC.

21.25. Докажите, что расстояние от вершины A остроугольного треугольника ABC до ортоцентра H можно вычислить по формуле: 1) $AH = 2R\cos A$; 2) $AH = BC\operatorname{ctg} A$.

21.26. Найдите угол C остроугольного треугольника ABC, если расстояние от вершины C до ортоцентра треугольника равно радиусу описанной окружности.

21.27. Высоты остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке H. Известно, что $CH = AB$. Найдите угол C треугольника ABC.

21.28. Используя теорему Чевы, докажите, что высоты остроугольного треугольника пересекаются в одной точке.

21.29. Окружность, центр которой принадлежит стороне AC треугольника ABC, касается сторон AB и BC в точках M и N соответственно. Докажите, что отрезки CM, AN и высота BF треугольника ABC пересекаются в одной точке.

§ 22 Решение прямоугольных треугольников

На рисунке 22.1 изображён прямоугольный треугольник с острыми углами α и β, катеты которого равны a и b, а гипотенуза равна c.

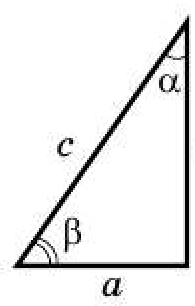


Рис. **22.1**

По определению синуса острого угла прямоугольного треугольника $\sin\alpha = \frac{a}{c}$, $\sin\beta = \frac{b}{c}$. Отсюда $a = c\sin\alpha$, $b = c\sin\beta$.

Следовательно, ***катет прямоугольного треугольника равен произведению гипотенузы на синус угла, противолежащего этому катету***.

По определению косинуса острого угла прямоугольного треугольника $\cos\alpha = \frac{b}{c}$, $\cos\beta = \frac{a}{c}$. Отсюда $b = c\cos\alpha$, $a = c\cos\beta$.

Следовательно, ***катет прямоугольного треугольника равен произведению гипотенузы на косинус угла, прилежащего к этому катету.***

По определению тангенса острого угла прямоугольного треугольника $\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}$, $\operatorname{tg}\beta = \frac{b}{a}$. Отсюда $a = b\operatorname{tg}\alpha$, $b = a\operatorname{tg}\beta$.

Следовательно, ***катет прямоугольного треугольника равен произведению второго катета на тангенс угла, противолежащего первому катету.***

Поскольку $\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}$, то $b = \frac{a}{\operatorname{tg}\alpha}$.

Следовательно, ***катет прямоугольного треугольника равен частному от деления второго катета на тангенс угла, прилежащего к первому катету.***

По определению котангенса острого угла прямоугольного треугольника $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{b}{a}$, $\operatorname{ctg}\beta = \frac{a}{b}$. Отсюда $b = a\operatorname{ctg}\alpha$, $a = b\operatorname{ctg}\beta$.

Следовательно, ***катет прямоугольного треугольника равен произведению второго катета на котангенс угла, прилежащего к первому катету.***

Из равенств $\sin\alpha = \frac{a}{c}$ и $\cos\alpha = \frac{b}{c}$ получаем: $c = \frac{a}{\sin\alpha}$ и $c = \frac{b}{\cos\alpha}$.

Следовательно, ***гипотенуза прямоугольного треугольника равна частному от деления катета на синус противолежащего ему угла;***

гипотенуза прямоугольного треугольника равна частному от деления катета на косинус прилежащего к нему угла.

Решить прямоугольный треугольник означает найти его стороны и углы по известным сторонам и углам.

Приведённые выше правила позволяют решать прямоугольный треугольник по одной стороне и одному острому углу.

В задачах на решение прямоугольных треугольников, если не обусловлено иначе, приняты такие обозначения (см. рис. 22.1): c — гипотенуза, a и b — катеты, α и β — углы, противолежащие катетам a и b соответственно.

Задача 1. Решите прямоугольный треугольник по катету и острому углу: $a = 14$ см, $\alpha = 38°$. (Значения тригонометрических функций найдите с помощью калькулятора и округлите их до сотых. Значения длин сторон округлите до десятых.)

Решение. Имеем:

$\beta = 90^\circ - \alpha$, $\beta = 90^\circ - 38^\circ = 52^\circ$;

$b = a \operatorname{tg} \beta$, $b = 14 \operatorname{tg} 52^\circ \approx 14 \cdot 1{,}28 \approx 17{,}9$ (см);

$$c = \frac{a}{\sin \alpha},\ c = \frac{14}{\sin 38^\circ} \approx \frac{14}{0{,}62} \approx 22{,}6 \text{ (см)}.$$

Ответ: $\beta = 52^\circ$, $b \approx 17{,}9$ см, $c \approx 22{,}6$ см. ■

Отметим, что гипотенузу можно было найти и другим способом, например, используя теорему Пифагора.

Задача 2. Решите прямоугольный треугольник по катету и гипотенузе: $a = 26$ см, $c = 34$ см.

Решение. Имеем: $\sin \alpha = \dfrac{a}{c}$, $\sin \alpha = \dfrac{26}{34} = 0{,}7647\ldots$.

Вычисляем угол α с помощью калькулятора: $\alpha \approx 50^\circ$.

Тогда $\beta \approx 40^\circ$.

$b = c \sin \beta$, $b \approx 34 \sin 40^\circ \approx 34 \cdot 0{,}643 \approx 21{,}9$ (см).

Ответ: $b \approx 21{,}9$ см, $\alpha \approx 50^\circ$, $\beta \approx 40^\circ$.

Задача 3. Высота AD треугольника ABC (рис. 22.2) делит его сторону BC на отрезки BD и CD такие, что $BD = 2\sqrt{3}$ см, $CD = 8$ см. Найдите стороны AB и AC, если $\angle B = 60^\circ$.

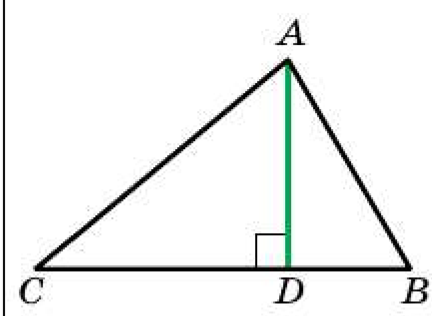


Рис. 22.2

Решение. В треугольнике ADB ($\angle ADB = 90^\circ$) получаем:

$AD = BD \operatorname{tg} B$, $AD = 2\sqrt{3} \operatorname{tg} 60^\circ = 2\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 6$ (см);

$$AB = \frac{BD}{\cos B},\ AB = \frac{2\sqrt{3}}{\cos 60^\circ} = 2\sqrt{3} : \frac{1}{2} = 4\sqrt{3} \text{ (см)}.$$

В треугольнике ADC ($\angle ADC = 90^\circ$) получаем:

$$AC = \sqrt{AD^2 + DC^2} = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10 \text{ (см)}.$$

Ответ: $4\sqrt{3}$ см, 10 см. ■

Задача 4. Боковая сторона равнобедренного треугольника равна b, угол при основании равен α. Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник.

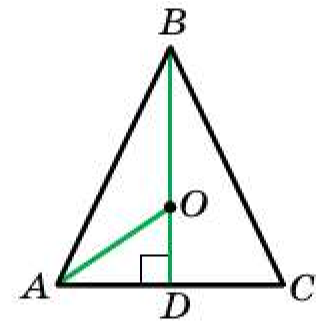


Рис. 22.3

Решение. В треугольнике ABC (рис. 22.3) $AB = BC = b$, $\angle BAC = \alpha$. Проведём высоту BD.

В треугольнике ADB ($\angle ADB = 90°$) получаем: $AD = AB \cos \angle BAD = b \cos \alpha$.

Точка O — центр окружности, вписанной в треугольник ABC. Следовательно, точка O принадлежит высоте BD и биссектрисе AO угла BAC. Поскольку $OD \perp AC$, то вписанная окружность касается стороны AC в точке D. Таким образом, OD — радиус вписанной окружности. Отрезок AO — биссектриса угла BAD, поэтому $\angle OAD = \frac{1}{2} \angle BAD = \frac{\alpha}{2}$.

Из треугольника ADO ($\angle ADO = 90°$) получаем:

$$OD = AD \operatorname{tg} \angle OAD = b \cos \alpha \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}.$$

Ответ: $b \cos \alpha \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$. ■

?

1. Как можно найти катет прямоугольного треугольника, если известны гипотенуза и угол, противолежащий этому катету?
2. Как можно найти катет прямоугольного треугольника, если известны гипотенуза и угол, прилежащий к этому катету?
3. Как можно найти катет прямоугольного треугольника, если известны другой катет и угол, противолежащий искомому катету?
4. Как можно найти катет прямоугольного треугольника, если известны другой катет и угол, прилежащий к искомому катету?
5. Как можно найти гипотенузу прямоугольного треугольника, если известны катет и противолежащий этому катету угол?
6. Как можно найти гипотенузу прямоугольного треугольника, если известны катет и прилежащий к этому катету угол?

Упражнения

22.1. В треугольнике ABC $\angle C = 90°$. Найдите сторону:

1) BC, если $AB = 12$ см, $\sin A = \frac{3}{4}$;
2) AC, если $AB = 21$ см, $\cos A = 0{,}4$;
3) AC, если $BC = 4$ см, $\operatorname{tg} A = 1{,}6$;
4) AB, если $BC = 14$ см, $\cos B = \frac{7}{9}$;
5) AB, если $AC = 3{,}2$ см, $\sin B = 0{,}16$;
6) BC, если $AC = 2{,}3$ см, $\operatorname{tg} B = \frac{1}{2}$.

22.2. В треугольнике DEF $\angle E = 90°$. Найдите сторону:

1) DE, если $DF = 18$ см, $\cos D = \frac{2}{9}$;

2) DF, если $EF = 3{,}5$ см, $\cos F = 0{,}7$;

3) EF, если $DE = 2{,}4$ см, $\operatorname{tg} D = \frac{11}{12}$.

22.3. В прямоугольном треугольнике гипотенуза равна 17 см, а синус одного из острых углов — $\frac{8}{17}$. Найдите катеты треугольника.

22.4. Гипотенуза прямоугольного треугольника равна 10 см, а косинус одного из острых углов — 0,8. Найдите катеты треугольника.

22.5. Катет прямоугольного треугольника равен 48 см, а тангенс противолежащего угла — $3\frac{3}{7}$. Найдите другой катет и гипотенузу треугольника.

22.6. В прямоугольном треугольнике один из катетов равен 12 см, а тангенс прилежащего угла — 0,75. Найдите другой катет и гипотенузу треугольника.

22.7. Решите прямоугольный треугольник:

1) по гипотенузе и острому углу: $c = 28$ см, $\alpha = 48°$;

2) по катету и острому углу: $a = 56$ см, $\beta = 74°$;

3) по катету и гипотенузе: $a = 5$ см, $c = 9$ см;

4) по двум катетам: $a = 3$ см, $b = 7$ см.

22.8. Решите прямоугольный треугольник по известным элементам:

1) $a = 34$ см, $\alpha = 55°$;

2) $c = 16$ см, $\beta = 18°$;

3) $b = 12$ см, $c = 13$ см;

4) $a = 4$ см, $b = 14$ см.

22.9. Используя данные рисунка 22.4, найдите высоту дерева.

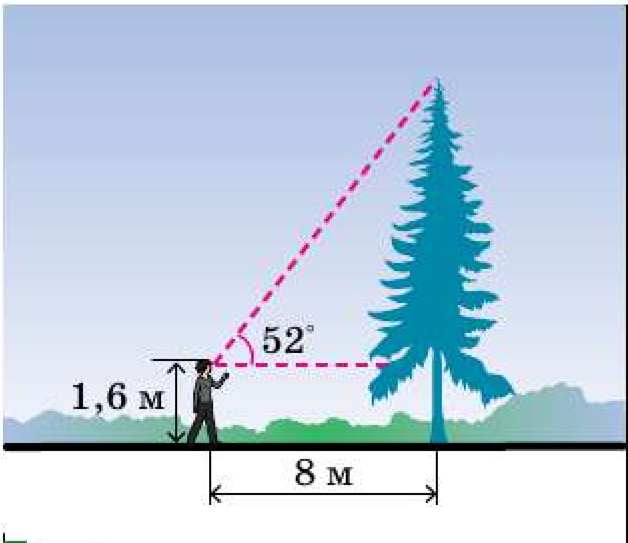


Рис. 22.4

22.10. Какой длины должна быть пожарная лестница, чтобы по ней можно было подняться на крышу дома высотой 9 м, если ставить её под углом 70° к поверхности земли?

22.11. Проехав от старта по прямолинейному участку шоссе 300 м, велосипедист оказался в точке, расположенной на 11 м выше, чем точка старта. Найдите тангенс угла подъёма шоссе на этом участке.

22.12. Под каким углом падает на землю солнечный луч, если длина тени от вертикального шеста равна длине самого шеста?

22.13. Угол при вершине равнобедренного треугольника равен $120°$, а высота, проведённая к основанию, — $3\sqrt{3}$ см. Найдите стороны треугольника.

22.14. Основания равнобокой трапеции равны 8 см и 12 см, а угол при основании — $45°$. Найдите высоту и боковую сторону трапеции.

22.15. Диагональ параллелограмма перпендикулярна его стороне и равна a. Найдите стороны параллелограмма, если один из его углов равен $30°$.

22.16. Сторона ромба равна a, а один из его углов — $60°$. Найдите диагонали ромба.

22.17. Высота BD треугольника ABC делит сторону AC на отрезки AD и CD так, что $AD = 12$ см, $CD = 4$ см. Найдите сторону BC, если $\angle A = 30°$.

22.18. Высота AF делит сторону BC треугольника ABC на отрезки BF и CF. Найдите сторону AC, если $CF = \sqrt{13}$ см, $\angle B = 60°$, а сторона AB равна 18 см.

22.19. Из точки D, лежащей вне прямой n, проведены к этой прямой наклонные DK и DB, образующие с ней углы $45°$ и $60°$ соответственно. Найдите длину проекции наклонной DK на прямую n, если $DB = 10\sqrt{3}$ см.

22.20. Из точки M, лежащей вне прямой l, проведены к этой прямой наклонные MN и MK, образующие с ней углы $30°$ и $45°$ соответственно. Найдите наклонную MK, если проекция наклонной MN на прямую l равна $4\sqrt{3}$ см.

22.21. Угол при вершине равнобедренного треугольника равен β, высота, проведённая к боковой стороне, равна h. Найдите основание треугольника.

22.22. Высота, проведённая из вершины прямого угла треугольника, равна h, острый угол равен α. Найдите стороны треугольника.

22.23. Один из катетов прямоугольного треугольника равен a. Угол между другим катетом и высотой, проведённой из вершины прямого угла, равен φ. Найдите неизвестные стороны треугольника и проведённую высоту.

22.24. Бо́льшая диагональ ромба равна d, а острый угол равен α. Найдите сторону и меньшую диагональ ромба.

22.25. Острый угол ромба равен α, радиус вписанной окружности — r. Найдите сторону и диагонали ромба.

22.26. Диагональ равнобокой трапеции перпендикулярна боковой стороне и образует с основанием трапеции угол 30°. Найдите высоту трапеции, если радиус окружности, описанной около трапеции, равен R.

22.27. Одна из сторон треугольника равна a, прилежащие к ней углы равны 45° и 60°. Найдите высоту треугольника, проведённую к данной стороне.

22.28. Основания трапеции равны 7 см и 15 см, а углы при большем основании — 30° и 60°. Найдите высоту и диагонали трапеции.

Итоги главы 4

Метрические соотношения в прямоугольном треугольнике

Квадрат высоты прямоугольного треугольника, проведённой к гипотенузе, равен произведению проекций катетов на гипотенузу.

Квадрат катета равен произведению гипотенузы и проекции этого катета на гипотенузу.

Теорема Пифагора

В прямоугольном треугольнике квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов.

Синус острого угла прямоугольного треугольника

Синусом острого угла прямоугольного треугольника называют отношение противолежащего катета к гипотенузе.

Косинус острого угла прямоугольного треугольника

Косинусом острого угла прямоугольного треугольника называют отношение прилежащего катета к гипотенузе.

Тангенс острого угла прямоугольного треугольника

Тангенсом острого угла прямоугольного треугольника называют отношение противолежащего катета к прилежащему.

Котангенс острого угла прямоугольного треугольника

Котангенсом острого угла прямоугольного треугольника называют отношение прилежащего катета к противолежащему.

Тригонометрические формулы

$\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ $\qquad$ $\operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$

$\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1$

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ — основное тригонометрическое тождество

$\cos(90^\circ - \alpha) = \sin\alpha$ $\qquad$ $\operatorname{tg}(90^\circ - \alpha) = \operatorname{ctg}\alpha$

$\sin(90^\circ - \alpha) = \cos\alpha$ $\qquad$ $\operatorname{ctg}(90^\circ - \alpha) = \operatorname{tg}\alpha$

Соотношения между сторонами и значениями тригонометрических функций углов в прямоугольном треугольнике

- Катет прямоугольного треугольника равен произведению гипотенузы на синус угла, противолежащего этому катету.

- Катет прямоугольного треугольника равен произведению гипотенузы на косинус угла, прилежащего к этому катету.
- Катет прямоугольного треугольника равен произведению второго катета на тангенс угла, противолежащего первому катету.
- Катет прямоугольного треугольника равен частному от деления второго катета на тангенс угла, прилежащего к первому катету.
- Катет прямоугольного треугольника равен произведению второго катета на котангенс угла, прилежащего к первому катету.
- Гипотенуза прямоугольного треугольника равна частному от деления катета на синус противолежащего ему угла.
- Гипотенуза прямоугольного треугольника равна частному от деления катета на косинус прилежащего к нему угла.

Глава

5 Площадь многоугольника

В этой главе вы уточните свои представления о площади многоугольника. Изучите формулы для нахождения площади параллелограмма, треугольника и трапеции. Научитесь применять эти формулы при решении задач.

§ 23 Понятие площади многоугольника. Площадь прямоугольника

С такой величиной, как площадь, вы часто встречаетесь в повседневной жизни: площадь квартиры, площадь дачного участка, площадь поля и т. п.

Опыт подсказывает вам, что равные земельные участки имеют равные площади, что площадь квартиры равна сумме площадей всех её помещений (комнат, кухни, коридора и т. д.).

Вы знаете, что площади земельных участков измеряют в сотках (арах) и гектарах; площади регионов и государств — в квадратных километрах; площади квартир — в квадратных метрах.

На этих практических знаниях о площади основывается определение площади многоугольника.

Определение

Площадью многоугольника называют положительную величину, которая обладает следующими свойствами:

1) равные многоугольники имеют равные площади;

2) если многоугольник составлен из нескольких многоугольников, то его площадь равна сумме площадей этих многоугольников;

3) за единицу измерения площади принимают единичный квадрат, т. е. квадрат со стороной, равной единице измерения длины.

Измерить площадь многоугольника — это значит сравнить его площадь с площадью единичного квадрата. В результате получают **числовое значение площади** данного многоугольника. Это число показывает, во сколько раз площадь данного многоугольника отличается от площади единичного квадрата.

Например, если клетку принять за единичный квадрат, то площадь многоугольника, изображённого на рисунке 23.1, будет равна 11 квадратным единицам (кратко записывают: 11 ед^2).

Обычно для нахождения площади используют формулы, т. е. вычисляют площадь многоугольника по определённым его элементам (сторонам, диагоналям, высотам и т. д.). Некоторые из формул вы уже знаете. Например, вы неоднократно применяли формулу $S = ab$, где S — площадь прямоугольника, a и b — длины его соседних сторон.

Для доказательства этой формулы потребуется следующая лемма.

Лемма

Площадь квадрата со стороной $\frac{1}{n}$ ед. (n — натуральное число) равна $\frac{1}{n^2}$ ед^2.

Доказательство

Рассмотрим единичный квадрат и разделим его на n^2 равных квадратов со стороной $\frac{1}{n}$ (рис. 23.2).

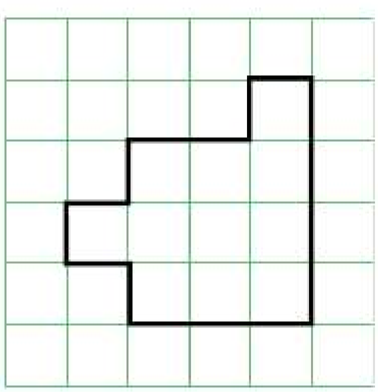


Рис. 23.1

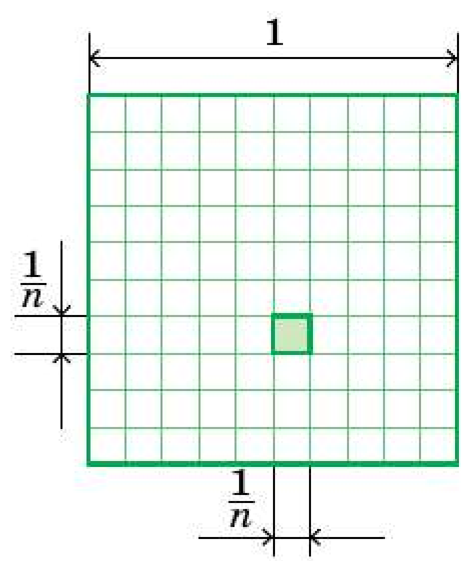


Рис. 23.2

Из определения площади многоугольника (свойство 1) следует, что все эти квадраты имеют равные площади. По свойству 2 сумма площадей этих квадратов равна площади единичного квадрата, т. е. равна 1 ед^2. Поэтому площадь каждого маленького квадрата равна $\frac{1}{n^2}$ ед^2. ■

Теорема 23.1

Площадь прямоугольника равна произведению длин его соседних сторон.

Доказательство

На рисунке 23.3 изображён прямоугольник $ABCD$, длины соседних сторон которого равны a и b: $AB = a$, $BC = b$. Докажем, что площадь S прямоугольника можно вычислить по формуле $S = ab$.

Пусть a и b — рациональные числа. Представим их в виде обыкновенных дробей с одинаковыми знаменателями:

$$a = \frac{p}{n},\ \ b = \frac{q}{n},\ \text{где } p,\ q \text{ и } n \text{ — натуральные числа.}$$

Разделим сторону AB на p равных частей, а сторону BC — на q равных частей. Через точки деления проведём прямые, параллельные сторонам прямоугольника. Тогда прямоугольник будет разделён на pq равных квадратов со стороной $\frac{1}{n}$.

Согласно лемме площадь каждого квадрата равна $\frac{1}{n^2}$. Из определения площади (свойство 2) следует, что площадь прямоугольника равна сумме площадей всех квадратов, т. е.

$$S = \underbrace{\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2} + \ldots + \frac{1}{n^2}}_{pq \text{ слагаемых}} = pq \cdot \frac{1}{n^2} = \frac{p}{n} \cdot \frac{q}{n} = ab.$$

Теперь рассмотрим случай, когда a — иррациональное число, b — рациональное число (случай, когда a и b — иррациональные числа, рассматривают аналогично).

Рассмотрим произвольное натуральное число n такое, что $a > \frac{1}{n}$, и отметим на координатной прямой числа $\frac{1}{n},\ \frac{2}{n},\ \ldots,\ \frac{k}{n},\ \ldots,\ k \in \boldsymbol{N}$. Поскольку a — иррациональное число, то найдётся такое натуральное число k, что $a \in \left(\frac{k}{n};\ \frac{k+1}{n}\right)$ (рис. 23.4).

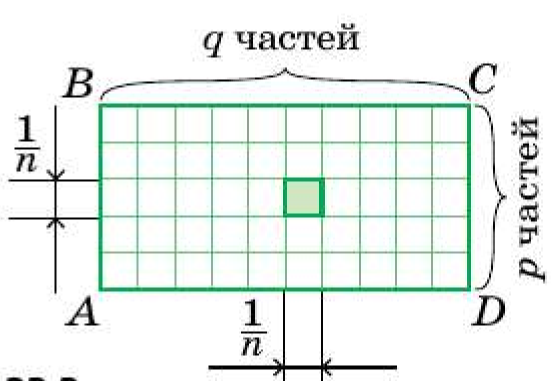


Рис. 23.3

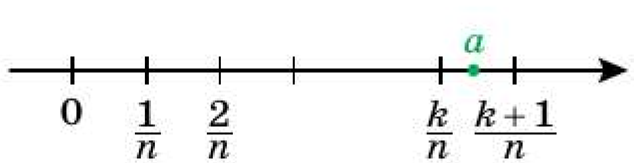


Рис. 23.4

Рассмотрим три прямоугольника со сторонами $\frac{k}{n}$ и b, a и b, $\frac{k+1}{n}$ и b. Поскольку $\frac{k}{n} < a < \frac{k+1}{n}$, то эти прямоугольники можно расположить так, как показано на рисунке 23.5.

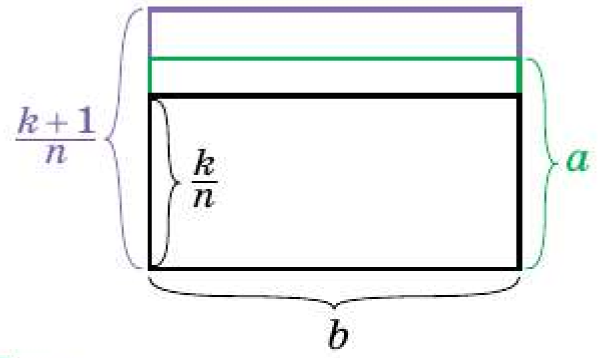


Рис. **23.5**

Площадь первого прямоугольника равна $\frac{kb}{n}$, третьего — $\frac{(k+1)b}{n}$. Тогда площадь S второго прямоугольника удовлетворяет неравенству $\frac{kb}{n} < S < \frac{(k+1)b}{n}$.

Из неравенства $\frac{k}{n} < a < \frac{k+1}{n}$ получаем:

$$k < an < k + 1;$$
$$-an < -k < 1 - an;$$
$$an - 1 < k < an.$$

Имеем:

$$\frac{(an-1)b}{n} < \frac{kb}{n} < S < \frac{(k+1)b}{n} < \frac{(an+1)b}{n}.$$

Отсюда:

$$ab - \frac{b}{n} < S < ab + \frac{b}{n};$$
$$-\frac{b}{n} < S - ab < \frac{b}{n};$$
$$|S - ab| < \frac{b}{n}.$$

Пусть $S \neq ab$. Тогда $|S - ab| > 0$. Дробь $\frac{b}{n}$ при достаточно больших n может стать меньше любого наперёд заданного числа, а следовательно, и меньше $|S - ab|$. Но мы показали, что при любом натуральном n имеет место неравенство $\frac{b}{n} > |S - ab|$. Получили противоречие. Следовательно, $S = ab$. ■

Определение

Многоугольники, имеющие равные площади, называют равновеликими.

Из определения площади (свойство 1) следует, что все равные фигуры равновелики. Однако не все фигуры, имеющие равные площади, являются равными. Например, на рисунке 23.6 изображены два многоугольника, каждый из которых составлен из семи единичных квадратов. Эти многоугольники равновелики, но не равны.

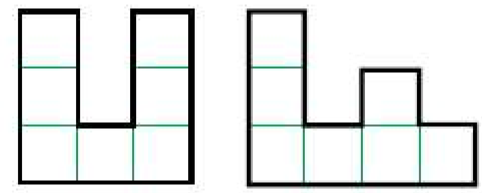


Рис. 23.6

1. Что называют площадью многоугольника?
2. Чему равна площадь прямоугольника с данными сторонами?
3. Какие многоугольники называют равновеликими?

Упражнения

23.1. Диагональ прямоугольника равна d и образует с одной из сторон угол α. Найдите площадь прямоугольника.

23.2. Сторона прямоугольника равна 15 см и образует с диагональю угол 30°. Найдите площадь прямоугольника.

23.3. На продолжении стороны AD параллелограмма $ABCD$ за точку D отметили точку M так, что $AD = MD$. Докажите, что параллелограмм $ABCD$ и треугольник ABM равновелики.

23.4. Площадь квадрата $ABCD$ равна 10 см^2 (рис. 23.7). Чему равна площадь прямоугольника $BMKD$?

23.5. Докажите, что если точка E — середина отрезка AK (рис. 23.8), то треугольник AKD и прямоугольник $ABCD$ равновелики.

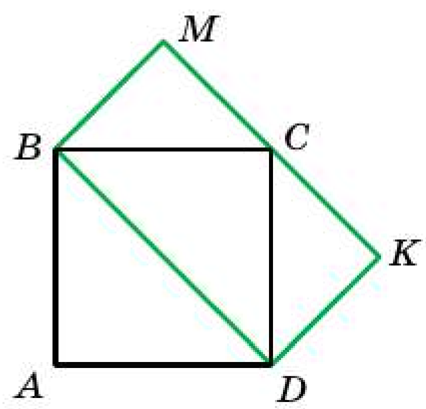


Рис. 23.7

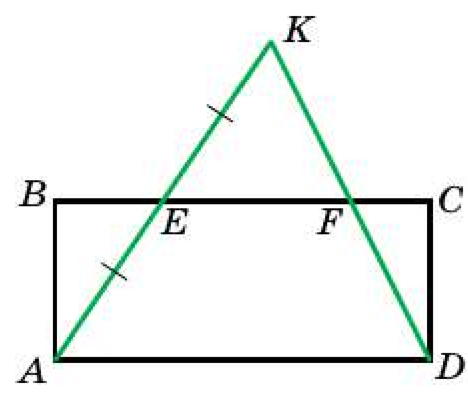


Рис. 23.8

23.6. Во сколько раз площадь квадрата, описанного около окружности, больше площади квадрата, вписанного в эту окружность?

23.7. Площадь прямоугольного листа бумаги, длины сторон которого выражены целыми числами сантиметров, равна 12 см^2. Сколько квадратов площадью 4 см^2 можно вырезать из этого листа?

23.8. Площадь прямоугольного листа бумаги, длины сторон которого выражены целыми числами сантиметров, равна 18 см^2. Сколько квадратов со стороной 3 см можно вырезать из этого листа?

23.9. Биссектриса угла прямоугольника делит его диагональ в отношении 2 : 7. Найдите площадь прямоугольника, если его периметр равен 108 см.

23.10. Биссектриса угла прямоугольника делит его диагональ в отношении 1 : 4. Найдите периметр прямоугольника, если его площадь равна 36 см^2.

23.11. Из прямоугольника $ABCD$ вырезали прямоугольник $MNKF$ (рис. 23.9). Проведите прямую, которая разделит закрашенную фигуру на две равновеликие фигуры.

23.12. Постройте квадрат, площадь которого равна сумме площадей двух данных квадратов.

23.13. Стороны прямоугольника равны a и b. Постройте квадрат, площадь которого равна площади данного прямоугольника.

23.14. Прямоугольник $ABCD$ разделили параллельными линиями на девять прямоугольников (рис. 23.10). Площадь закрашенного прямоугольника равна S, а площадь прямоугольника $ABCD$ равна Q. Найдите площадь четырёхугольника $KLMN$.

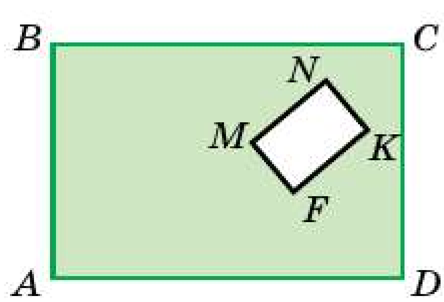


Рис. 23.9

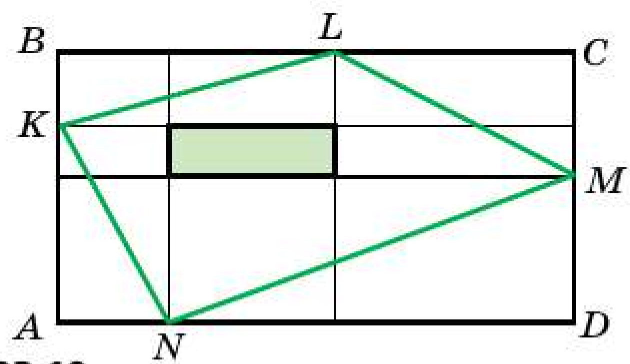


Рис. 23.10

§ 24 Площадь параллелограмма

Теорема 24.1

Площадь параллелограмма равна произведению его стороны и высоты, проведённой к этой стороне.

Доказательство

На рисунке 24.1 изображён параллелограмм $ABCD$, площадь которого равна S, и его высота BM. Докажем, что $S = BC \cdot BM$.

Проведём высоту CN. Легко показать (сделайте это самостоятельно), что четырёхугольник $MBCN$ — прямоугольник. Покажем, что он равновелик данному параллелограмму.

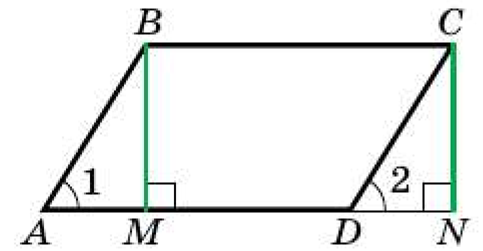


Рис. **24.1**

Площадь параллелограмма равна сумме площадей треугольника ABM и трапеции $MBCD$. Площадь прямоугольника равна сумме площадей указанной трапеции и треугольника DCN. Однако треугольники ABM и DCN равны по гипотенузе и острому углу (отрезки AB и CD равны как противолежащие стороны параллелограмма, углы 1 и 2 равны как соответственные при параллельных прямых AB и DC и секущей AD). Значит, эти треугольники равновелики. Отсюда следует, что параллелограмм $ABCD$ и прямоугольник $MBCN$ равновелики.

По теореме 23.1 площадь прямоугольника $MBCN$ равна произведению длин сторон BC и BM. Тогда $S = BC \cdot BM$, где S — площадь параллелограмма $ABCD$.

Для завершения доказательства надо рассмотреть случаи, когда основание M высоты BM не будет принадлежать стороне AD (рис. 24.2) или совпадёт с вершиной D (рис. 24.3). И в этих случаях параллелограмм $ABCD$ и прямоугольник $MBCN$ будут равновеликими. Рассмотрите эти случаи самостоятельно. ■

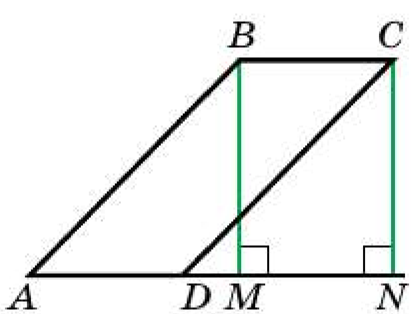


Рис. **24.2**

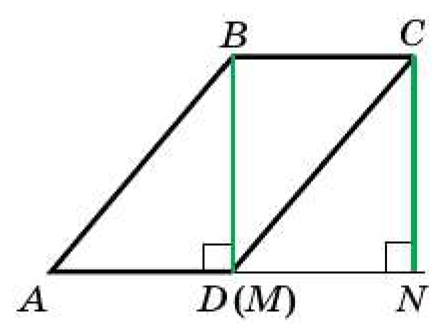


Рис. **24.3**

Если обозначить длины стороны параллелограмма и проведённой к ней высоты соответственно буквами a и h, то площадь S параллелограмма вычисляют по формуле

$$\boxed{S = ah}$$

? Чему равна площадь параллелограмма с данными сторонами?

Упражнения

24.1. Какие из параллелограммов, изображённых на рисунке 24.4, равновелики?

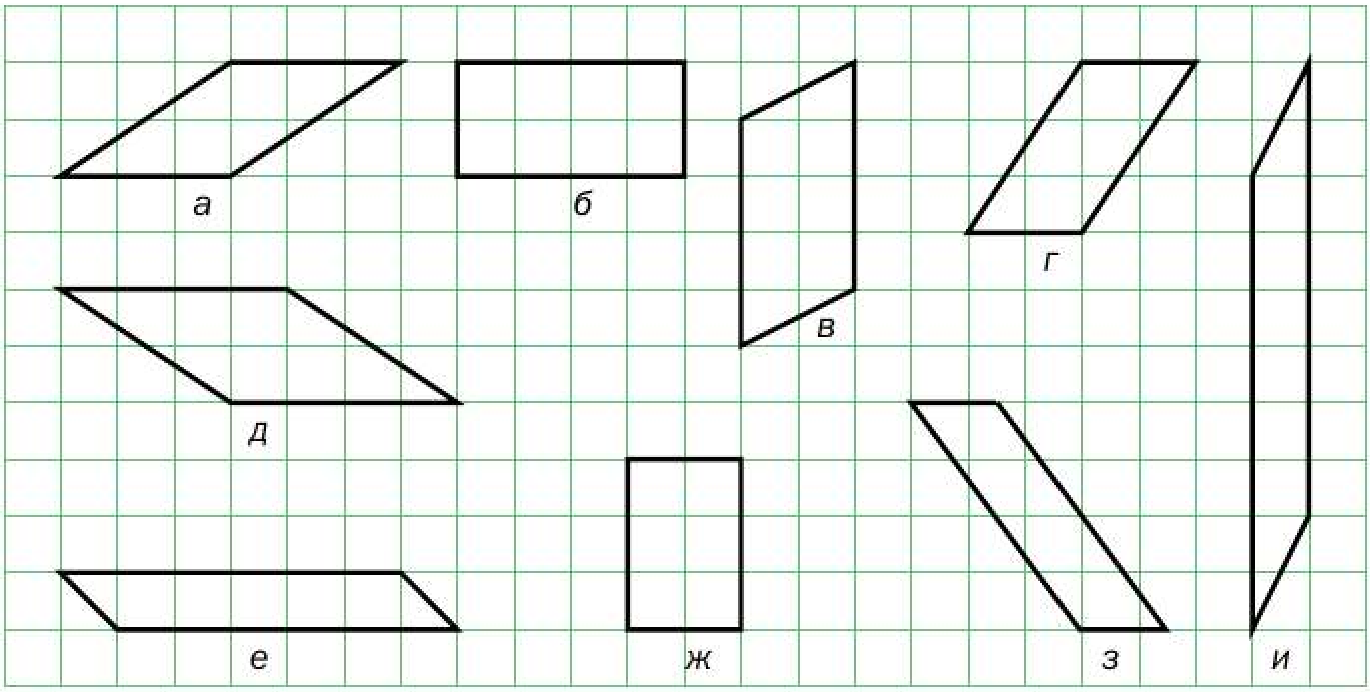


Рис. **24.4**

24.2. Площадь параллелограмма $ABCD$ (рис. 24.5) равна S. Чему равна площадь закрашенной фигуры?

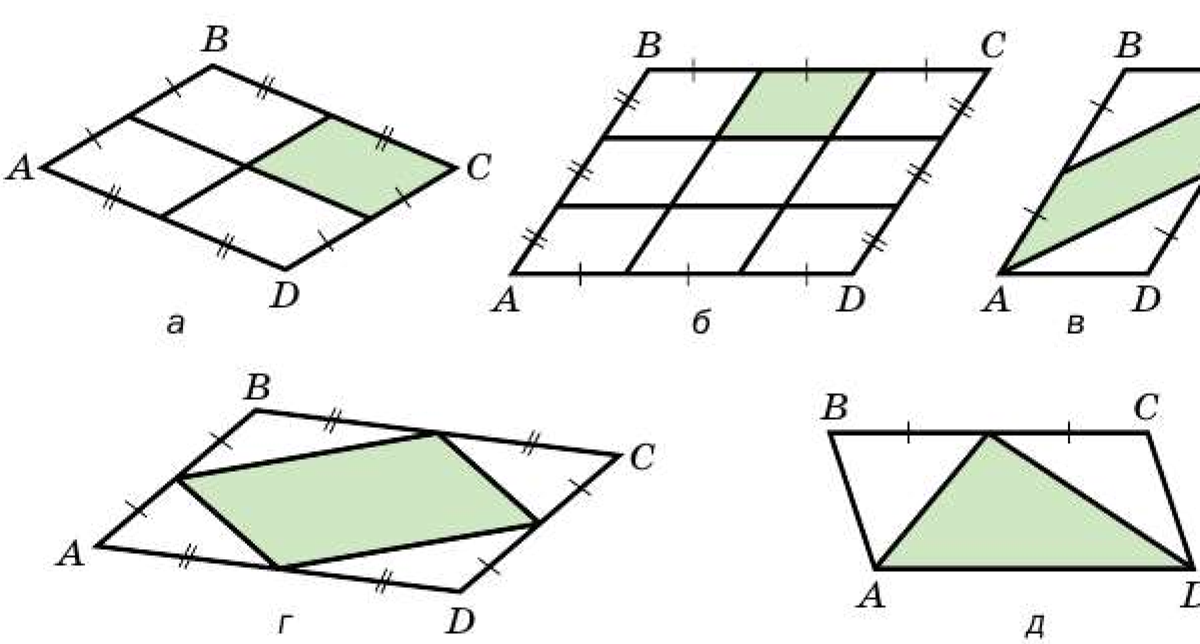


Рис. **24.5**

24.3. Стороны параллелограмма равны 10 см и 15 см, а одна из высот равна: 1) 6 см; 2) 12 см. Найдите другую высоту параллелограмма. Сколько решений в каждом случае имеет задача?

24.4. Найдите площадь параллелограмма, стороны которого равны 15 см и 25 см, а одна из диагоналей перпендикулярна меньшей стороне.

24.5. Найдите площадь параллелограмма, диагонали которого равны 26 см и 24 см, а одна из них перпендикулярна стороне параллелограмма.

24.6. Диагональ параллелограмма, равная 18 см, перпендикулярна одной из сторон и образует угол 30° с другой стороной. Найдите площадь параллелограмма.

24.7. Стороны параллелограмма равны a и b, его острый угол равен α. Найдите площадь параллелограмма.

24.8. Угол между высотами параллелограмма, проведёнными из вершины тупого угла, равен 60°. Найдите площадь параллелограмма, если его высоты равны 8 см и 12 см.

24.9. Стороны параллелограмма равны 14 см и 20 см, а угол между его высотами, проведёнными из вершины тупого угла, — 45°. Найдите площадь параллелограмма.

24.10. Найдите площадь ромба, если его высота равна 6 см, а бо́льшая диагональ — 10 см.

24.11. Меньшая диагональ ромба равна a, а один из углов — 60°. Найдите площадь ромба.

24.12. Докажите, что высоты параллелограмма обратно пропорциональны сторонам, к которым они проведены.

24.13. Стороны параллелограмма равны 9 см и 12 см, а сумма двух его неравных высот равна 14 см. Найдите площадь параллелограмма.

24.14. Разность двух сторон параллелограмма равна 12 см, а проведённые к ним высоты равны 15 см и 10 см. Найдите площадь параллелограмма.

24.15. Докажите, что из всех параллелограммов со сторонами a и b наибольшую площадь имеет прямоугольник.

§ 25 Площадь треугольника

Теорема 25.1

Площадь треугольника равна половине произведения его стороны и проведённой к ней высоты.

Доказательство

На рисунке 25.1 изображены треугольник ABC, площадь которого равна S, и его высота BM. Докажем, что $S = \frac{1}{2} AC \cdot BM$.

Через вершины B и C треугольника проведём прямые, параллельные сторонам AC и AB соответственно (см. рис. 25.1). Пусть эти прямые пересекаются в точке N. Четырёхугольник $ABNC$ — параллелограмм по определению. Треугольники ABC и NCB равны (докажите это самостоятельно). Следовательно, равны и их площади. Тогда площадь треугольника ABC равна половине площади параллелограмма $ABNC$. Высота BM треугольника ABC является также высотой параллелограмма $ABNC$. Таким образом, $S = \frac{1}{2} AC \cdot BM$. ■

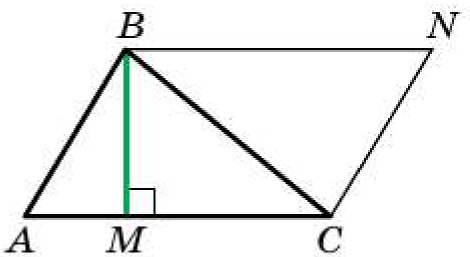


Рис. **25.1**

Если воспользоваться обозначениями для высот и сторон треугольника ABC, то согласно доказанной теореме имеем:

$$S = \frac{1}{2} a h_a = \frac{1}{2} b h_b = \frac{1}{2} c h_c,$$

где S — площадь треугольника.

Следствие

Площадь прямоугольного треугольника равна половине произведения его катетов.

Докажите эту теорему самостоятельно.

Площадь многоугольника $A_1A_2 \ldots A_n$ будем обозначать так: $S_{A_1A_2 \ldots A_n}$.

Теорема 25.2

Площадь треугольника равна произведению его полупериметра и радиуса вписанной окружности.

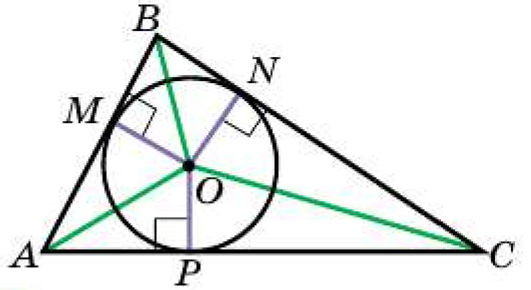


Рис. **25.2**

Доказательство

На рисунке 25.2 изображён треугольник ABC, в который вписана окружность радиуса r. Докажем, что

$$S = pr,$$

где S — площадь данного треугольника, p — его полупериметр.

Пусть точка O — центр вписанной окружности, которая касается сторон треугольника ABC в точках M, N и P. Площадь треугольника ABC равна сумме площадей треугольников AOB, BOC, COA. Это удобно записать в такой форме:

$$S = S_{AOB} + S_{BOC} + S_{COA}.$$

Проведём радиусы в точки касания. Получаем: $OM \perp AB$, $ON \perp BC$, $OP \perp CA$. Отсюда:

$$S_{AOB} = \frac{1}{2} AB \cdot OM = \frac{1}{2} AB \cdot r;$$

$$S_{BOC} = \frac{1}{2} BC \cdot ON = \frac{1}{2} BC \cdot r;$$

$$S_{COA} = \frac{1}{2} AC \cdot OP = \frac{1}{2} AC \cdot r.$$

Следовательно, $S = \frac{1}{2} AB \cdot r + \frac{1}{2} BC \cdot r + \frac{1}{2} AC \cdot r = \frac{AB + BC + AC}{2} \cdot r = pr$. ■

Обобщением теоремы 25.2 является следующая теорема.

Теорема 25.3

Площадь описанного многоугольника равна произведению его полупериметра и радиуса вписанной окружности.

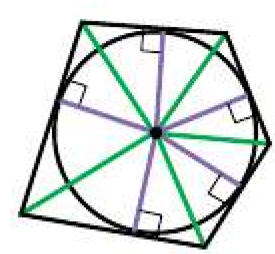


Рис. **25.3**

Докажите эту теорему самостоятельно (рис. 25.3).

Заметим, что теорема 25.3 позволяет находить радиус вписанной окружности многоугольника по формуле

$$\boxed{r = \frac{S}{p}}$$

Задача 1. Диагонали AC и BD четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке M. Докажите, что для параллельности сторон BC и AD необходимо и достаточно выполнение равенства $S_{ABM} = S_{DCM}$.

Решение. Докажем необходимое условие. Пусть в четырёхугольнике $ABCD$ стороны BC и AD параллельны. Тогда в треугольниках ABD и ACD высоты BE и CF равны, а сторона AD — общая (рис. 25.4).

Отсюда $S_{ABD} = S_{DCA}$. Имеем:

$$S_{ABM} = S_{ABD} - S_{AMD};$$
$$S_{DCM} = S_{DCA} - S_{AMD}.$$

Тогда $S_{ABM} = S_{DCM}$.

Докажем достаточное условие. Пусть $S_{ABM} = S_{DCM}$. Имеем:

$$S_{ABD} = S_{ABM} + S_{AMD};$$
$$S_{DCA} = S_{DCM} + S_{AMD}.$$

Тогда $S_{ABD} = S_{DCA}$.

У равновеликих треугольников ABD и DCA сторона AD общая. Следовательно, высоты треугольников, проведённые к этой стороне, равны. Это значит, что точки B и C удалены на одинаковое расстояние от прямой AD. Отсюда $BC \parallel AD$. ■

Задача 2. На стороне AC треугольника ABC отметили точку M так, что $\frac{AM}{MC} = \frac{m}{n}$.

1) Пусть X — произвольная точка отрезка BM, отличная от точки M. Докажите, что $\frac{S_{AXM}}{S_{MXC}} = \frac{m}{n}$.

2) Пусть X — произвольная внутренняя точка отрезка BM. Докажите, что $\frac{S_{ABX}}{S_{CBX}} = \frac{m}{n}$.

Решение. 1) В треугольниках AXM и MXC (рис. 25.5) высота XD общая. Имеем:

$$\frac{S_{AXM}}{S_{MXC}} = \frac{\frac{1}{2}AM \cdot XD}{\frac{1}{2}MC \cdot XD} = \frac{AM}{MC} = \frac{m}{n}.$$

Заметим, что утверждение остаётся справедливым и в том случае, когда точка X совпадает с точкой B, т. е. $\frac{S_{ABM}}{S_{MBC}} = \frac{m}{n}$.

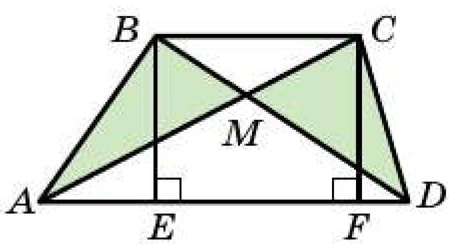


Рис. 25.4

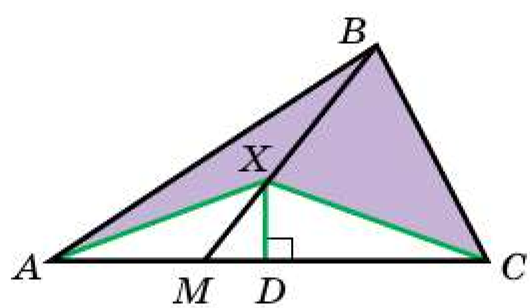


Рис. 25.5

2) Запишем:

$$S_{ABM} = \frac{m}{n} S_{MBC}; \qquad (1)$$

$$S_{AXM} = \frac{m}{n} S_{MXC}. \qquad (2)$$

Вычтем почленно из равенства (1) равенство (2):

$$S_{ABM} - S_{AXM} = \frac{m}{n}(S_{MBC} - S_{MXC}).$$

Отсюда $S_{ABX} = \frac{m}{n} S_{CBX}$, т. е. $\frac{S_{ABX}}{S_{CBX}} = \frac{m}{n}$. ■

Задача 3. Диагонали AC и BD четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке M. Докажите, что $S_{ABM} \cdot S_{DCM} = S_{BCM} \cdot S_{ADM}$.

Решение. Треугольники ABM и ADM имеют общую высоту AK (рис. 25.6). Тогда $\frac{S_{ABM}}{S_{ADM}} = \frac{BM}{MD}$.

Аналогично $\frac{S_{BCM}}{S_{DCM}} = \frac{BM}{MD}$.

Отсюда $\frac{S_{ABM}}{S_{ADM}} = \frac{S_{BCM}}{S_{DCM}}$, т. е.

$S_{ABM} \cdot S_{DCM} = S_{BCM} \cdot S_{ADM}$. ■

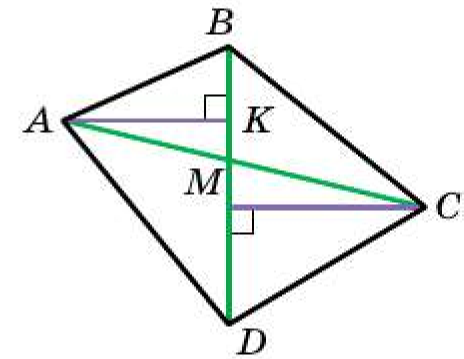


Рис. 25.6

Задача 4. Докажите, что радиусы вневписанных окружностей треугольника ABC можно вычислить по формулам $R_A = \frac{S}{p-a}$, $R_B = \frac{S}{p-b}$, $R_C = \frac{S}{p-c}$, где S — площадь треугольника ABC, p — его полупериметр.

Решение. Пусть вневписанная окружность с центром O треугольника ABC касается его стороны AC в точке K, а продолжений сторон AB и BC — в точках M и N соответственно (рис. 25.7). Имеем:

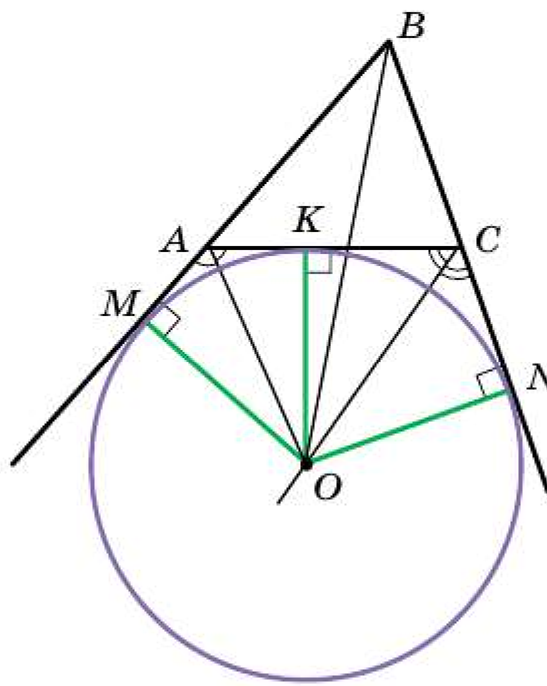


Рис. 25.7

$$S_{ABC} = S_{OAB} + S_{OCB} - S_{OAC} = \frac{1}{2}OM \cdot AB + \frac{1}{2}ON \cdot BC - \frac{1}{2}OK \cdot AC =$$

$$= \frac{1}{2}R_B(c + a - b) = R_B \cdot \frac{a + b + c - 2b}{2} = R_B \cdot \frac{2p - 2b}{2} = R_B(p - b).$$

Отсюда $R_B = \frac{S}{p - b}$.

Аналогично можно показать, что $R_A = \frac{S}{p - a}$, $R_C = \frac{S}{p - c}$. ■

Задача 5. Постройте треугольник по трём его высотам.

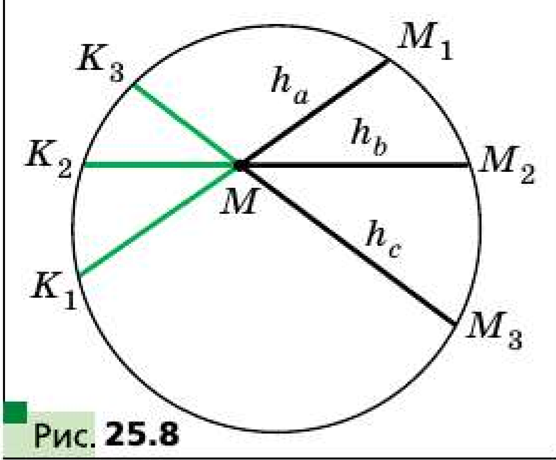


Рис. **25.8**

Решение. Пусть a, b и c — стороны, а h_a, h_b и h_c — соответствующие высоты искомого треугольника ABC. От произвольной точки M отложим отрезки MM_1, MM_2 и MM_3, соответственно равные h_a, h_b, h_c, так, чтобы точки M_1, M_2 и M_3 не лежали на одной прямой (рис. 25.8). Около треугольника $M_1M_2M_3$ опишем окружность.

Пусть лучи M_1M, M_2M и M_3M пересекают окружность в точках K_1, K_2 и K_3 соответственно. Имеем: $MM_1 \cdot MK_1 = MM_2 \cdot MK_2 = MM_3 \cdot MK_3$, т. е.

$$h_a \cdot MK_1 = h_b \cdot MK_2 = h_c \cdot MK_3. \quad (1)$$

Также можем записать:

$$h_a \cdot a = h_b \cdot b = h_c \cdot c. \quad (2)$$

Из равенств (1) и (2) получаем:

$$\frac{MK_1}{a} = \frac{MK_2}{b} = \frac{MK_3}{c}.$$

Это значит, что треугольник со сторонами, равными MK_1, MK_2 и MK_3, подобен треугольнику ABC. Построив треугольник, подобный треугольнику ABC, найдём углы искомого треугольника ABC.

Теперь осталось построить треугольник по углам и высотам. Завершите решение самостоятельно. ■

?

1. Как найти площадь треугольника, если известны его сторона и высота, проведённая к ней?
2. Как найти площадь прямоугольного треугольника, если известны его катеты?
3. Как найти площадь треугольника, если известны его полупериметр и радиус вписанной окружности?
4. Как найти площадь описанного многоугольника, если известны его полупериметр и радиус вписанной окружности?

Упражнения

25.1. Найдите площадь равнобедренного треугольника, основание которого равно 24 см, а боковая сторона — 13 см.

25.2. Боковая сторона равнобедренного треугольника равна 61 см, а высота, проведённая к основанию, — 60 см. Найдите площадь треугольника.

25.3. Один из катетов прямоугольного треугольника равен 12 см, а медиана, проведённая к гипотенузе, — 18,5 см. Найдите площадь треугольника.

25.4. Найдите площадь прямоугольного треугольника, если высота, проведённая к гипотенузе, делит её на отрезки длиной 3 см и 27 см.

25.5. Высота прямоугольного треугольника, проведённая к гипотенузе, равна 8 см, а проекция одного из катетов на гипотенузу — 6 см. Найдите площадь треугольника.

25.6. Высота BD треугольника ABC делит его сторону AC на отрезки AD и CD. Найдите площадь треугольника ABC, если $BC = \sqrt{37}$ см, $\angle A = 30°$, $CD = 5$ см.

25.7. Высота AM треугольника ABC делит его сторону BC на отрезки BM и MC. Найдите площадь треугольника ABC, если $AB = 10\sqrt{2}$ см, $AC = 26$ см, $\angle B = 45°$.

25.8. Найдите площадь равнобедренного треугольника, боковая сторона которого равна b, а угол при основании равен α.

25.9. Высота равнобедренного треугольника, проведённая к основанию, равна h, а угол при вершине равен β. Найдите площадь треугольника.

25.10. Найдите площадь равностороннего треугольника, сторона которого равна a.

25.11. Найдите площадь равнобедренного прямоугольного треугольника, гипотенуза которого равна c.

25.12. Найдите высоту прямоугольного треугольника, проведённую к гипотенузе, если его катеты равны 10 см и 24 см.

25.13. Точка касания окружности, вписанной в прямоугольный треугольник, делит его гипотенузу на отрезки длиной 8 см и 12 см. Найдите площадь треугольника.

25.14. Докажите, что площадь выпуклого четырёхугольника, диагонали которого перпендикулярны, равна половине их произведения.

25.15. Найдите площадь ромба, сторона которого равна 25 см, а сумма диагоналей — 62 см.

25.16. Найдите площадь ромба, сторона которого равна 39 см, а разность диагоналей — 42 см.

25.17. Даны прямая l и параллельный ей отрезок AB. Докажите, что все треугольники AXB, где X — произвольная точка прямой l, равновелики.

25.18. Докажите, что медиана треугольника разбивает его на два равновеликих треугольника.

25.19. Середину одной из диагоналей выпуклого четырёхугольника соединили с концами другой. Докажите, что полученная ломаная (либо полученный отрезок) делит четырёхугольник на две равновеликие части.

25.20. В треугольнике провели три медианы. Докажите, что они разбивают треугольник на шесть равновеликих треугольников.

25.21. Через вершину B треугольника ABC проведите две прямые так, чтобы они разбили данный треугольник на три равновеликих треугольника.

25.22. Через вершину параллелограмма проведите прямые так, чтобы они разбили данный параллелограмм: 1) на четыре равновеликих многоугольника; 2) на пять равновеликих многоугольников.

25.23. Через вершину ромба проведите две прямые так, чтобы они разбили данный ромб на три равновеликих многоугольника.

25.24. Постройте треугольник, равновеликий данному параллелограмму.

25.25. В треугольнике проведены три высоты. Докажите, что к наибольшей стороне треугольника проведена наименьшая высота.

25.26. Точка касания окружности, вписанной в прямоугольный треугольник, делит его гипотенузу на отрезки, один из которых на 14 см больше другого. Найдите площадь треугольника, если радиус вписанной окружности равен 4 см.

25.27. В прямоугольном треугольнике ABC к гипотенузе AB проведена высота CM. Площадь треугольника ACM равна 6 см^2, а площадь треугольника BCM — 54 см^2. Найдите стороны треугольника ABC.

25.28. Найдите площадь прямоугольного треугольника, если биссектриса его острого угла делит противолежащий катет на отрезки длиной 21 см и 35 см.

25.29. Найдите площадь прямоугольного треугольника, если биссектриса прямого угла делит гипотенузу на отрезки длиной 2 см и 6 см.

25.30. Центр окружности, вписанной в равнобедренный треугольник, делит его высоту, проведённую к основанию, на отрезки, длины которых равны 34 см и 16 см. Найдите площадь данного треугольника.

25.31. В равнобедренный треугольник вписана окружность. Точка касания делит боковую сторону треугольника в отношении 9 : 8, считая от вершины равнобедренного треугольника. Найдите площадь треугольника, если радиус вписанной окружности равен 16 см.

25.32. В трапеции $ABCD$ на боковой стороне AB отметили точку M так, что $AM : MB = 3 : 1$. Найдите отношение площадей треугольников BCD и MBD, если $BC : AD = 1 : 2$.

25.33. Докажите, что площадь прямоугольного треугольника равна произведению отрезков, на которые точка касания вписанной окружности делит гипотенузу.

25.34. Площади треугольников, образованных отрезками диагоналей трапеции и её основаниями, равны 4 см^2 и 9 см^2. Найдите площадь трапеции.

25.35. Площадь трапеции равна 16 см^2. Площадь треугольника, образованного отрезками диагоналей и одной из боковых сторон, равна 3 см^2. Найдите площади треугольников, образованных отрезками диагоналей и основаниями трапеции.

25.36. Докажите, что $\frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} + \frac{1}{h_3} = \frac{1}{r}$, где h_1, h_2 и h_3 — высоты треугольника, r — радиус вписанной окружности.

25.37. Докажите, что если площадь треугольника ABC равна rr_C, r — радиус вписанной окружности, r_C — радиус вневписанной окружности, касающейся стороны AB, то $\angle C = 90°$.

25.38. Касательная к окружности, вписанной в равносторонний треугольник ABC, пересекает стороны AB и BC в точках M и N соответственно. Найдите площадь треугольника MBN, если $AB = a$, $MN = b$.

25.39. Площадь прямоугольного треугольника равна $\frac{2}{3}r^2$, где r — радиус вневписанной окружности, касающейся одного из катетов. Найдите стороны треугольника.

25.40. Докажите, что сумма расстояний от любой точки основания равнобедренного треугольника до боковых сторон не зависит от положения точки на основании.

25.41. Докажите, что сумма расстояний от произвольной точки равностороннего треугольника до его сторон является постоянной для данного треугольника.

25.42. Отрезок, соединяющий середины двух противолежащих сторон выпуклого четырёхугольника, делит его на два равновеликих четырёхугольника. Докажите, что эти стороны параллельны.

25.43. Каждая диагональ четырёхугольника делит его на два равновеликих треугольника. Докажите, что этот четырёхугольник — параллелограмм.

25.44. На продолжениях сторон AB, BC и AC равностороннего треугольника ABC за точки B, C и A соответственно отметили точки D, E и F так, что $BD = CE = AF = 2AB$. Найдите площадь треугольника DEF, если площадь треугольника ABC равна 1 см^2.

25.45. В треугольнике ABC проведена медиана BM. Может ли радиус окружности, вписанной в треугольник BCM, быть в 2 раза меньше, чем радиус окружности, вписанной в треугольник ABC?

25.46. В треугольнике ABC отметили точку M так, что площади треугольников AMB, BMC и AMC равны. Докажите, что M — точка пересечения медиан треугольника ABC.

25.47. Диагонали выпуклого четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке O. Докажите, что если $S_{ABCD} = \left(\sqrt{S_{AOD}} + \sqrt{S_{COB}}\right)^2$, то $AD \parallel BC$.

25.48. Диагональ выпуклого четырёхугольника делит пополам отрезок, соединяющий середины двух противолежащих сторон четырёхугольника. Докажите, что эта диагональ разбивает четырёхугольник на два равновеликих треугольника.

25.49. На сторонах AB, BC, CD и DA параллелограмма $ABCD$ отметили соответственно точки M, N, K и F так, что $MK \parallel BC$, $NF \parallel AB$. Отрезки MK и NF пересекаются в точке Q. Площади параллелограммов $MBNQ$, $NCKQ$ и $KDFQ$ равны соответственно 3 см^2, 4 см^2 и 5 см^2. Найдите площадь параллелограмма $FAMQ$.

25.50. Два параллелограмма расположены так, что они имеют общую вершину, а ещё одна вершина каждого из параллелограммов лежит на стороне другого параллелограмма (рис. 25.9). Докажите, что площади этих параллелограммов равны.

25.51. На стороне AC треугольника ABC отметили точку D. Проведите через эту точку прямую так, чтобы она разбила данный треугольник на два равновеликих многоугольника.

25.52. Дан выпуклый n-угольник. Постройте равновеликий ему $(n - 1)$-угольник.

25.53. Дан квадрат $ABCD$. Найдите геометрическое место точек X таких, что $S_{ABX} + S_{CDX} = S_{BCX} + S_{ADX}$.

25.54. Точки E, F, K и L — середины сторон четырёхугольника $ABCD$ (рис. 25.10). Докажите, что сумма площадей треугольников ALM, BNE, CPF и KQD равна площади четырёхугольника $MNPQ$.

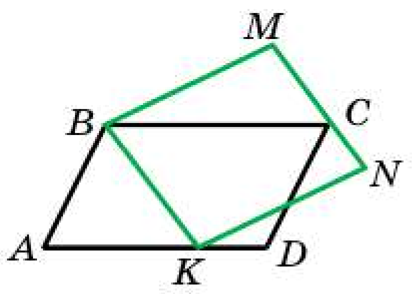


Рис. 25.9

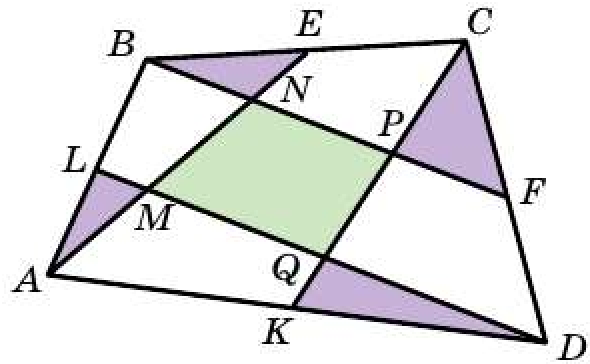


Рис. 25.10

25.55. В треугольник ABC вписана окружность радиуса r. Через центр этой окружности проведена прямая, пересекающая стороны AB и BC в точках M и N соответственно. Докажите, что $S_{MBN} \geqslant 2r^2$.

25.56. Диагонали выпуклого четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке E. Известно, что $S_{ABE} = S_{DCE} = 1$ см^2, $S_{ABCD} \leqslant 4$ см^2, $AD = 3$ см. Найдите сторону BC.

25.57. В треугольнике отметили две точки. Расстояния от одной из них до сторон треугольника равны 1 см, 3 см и 15 см, а от другой — 4 см, 5 см и 11 см (стороны рассматриваются в одном и том же порядке). Найдите радиус окружности, вписанной в данный треугольник.

25.58. Дан выпуклый четырёхугольник $ABCD$. Лучи AB и DC пересекаются в точке M, а лучи BC и AD — в точке N. Известно, что $S_{BMC} = S_{DNC}$. Докажите, что диагональ AC делит диагональ BD пополам.

§ 26 Площадь трапеции. Равносоставленные многоугольники

Теорема 26.1

Площадь трапеции равна произведению полусуммы её оснований и высоты.

Доказательство

На рисунке 26.1 изображена трапеция $ABCD$ ($AD \parallel BC$), площадь которой равна S. Отрезок CN — высота этой трапеции. Докажем, что $S = \frac{1}{2}(BC + AD) \cdot CN$.

Проведём диагональ AC и высоту AM трапеции. Отрезки AM и CN являются высотами треугольников ABC и ACD соответственно.

Имеем:

$$S = S_{ABC} + S_{ACD} = \frac{1}{2}BC \cdot AM + \frac{1}{2}AD \cdot CN =$$

$$= \frac{1}{2}BC \cdot CN + \frac{1}{2}AD \cdot CN = \frac{1}{2}(BC + AD) \cdot CN. \blacksquare$$

Если обозначить длины оснований трапеции и её высоты соответственно буквами a, b и h, то площадь S трапеции вычисляют по формуле

$$S = \frac{a + b}{2} \cdot h$$

Следствие

Площадь трапеции равна произведению её средней линии и высоты.

Если некоторый многоугольник можно разрезать на части и составить из них другой многоугольник, то такие два многоугольника называют **равносоставленными**.

Например, если прямоугольник разрезать вдоль его диагонали (рис. 26.2), то получим два равных прямоугольных треугольника, из которых можно составить равнобедренный треугольник (рис. 26.3). Фигуры на рисунках 26.2 и 26.3 — равносоставленные.

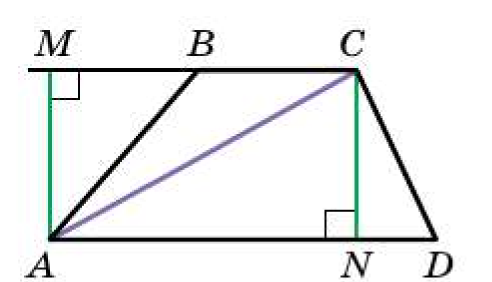


Рис. 26.1

Очевидно, что равносоставленные многоугольники являются равновеликими. Этот факт применяют при доказательстве теорем и решении задач. Например, доказывая теорему 24.1, мы фактически разрезали параллелограмм на треугольник ABM и трапецию $MBCD$, из которых составили прямоугольник $MBCN$ (см. рис. 24.1).

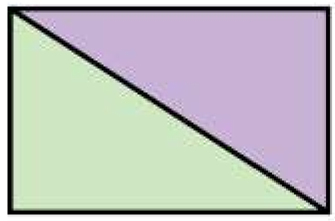


Рис. **26.2**

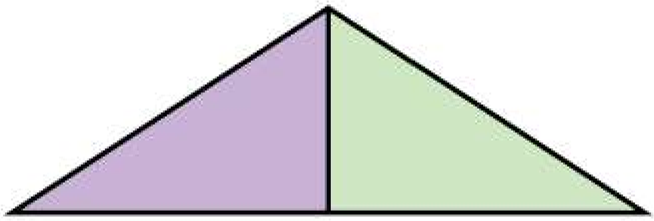


Рис. **26.3**

Если треугольник разрезать вдоль средней линии, то из полученных треугольника и трапеции можно составить параллелограмм (рис. 26.4).

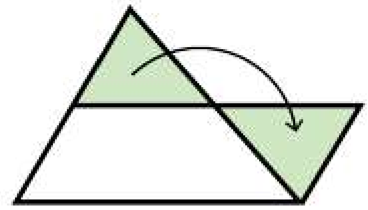


Рис. **26.4**

Легко установить (сделайте это самостоятельно), что такое разрезание треугольника приводит к ещё одному доказательству теоремы о площади треугольника (теорема 25.1). Этой же цели служит разрезание треугольника на части, из которых можно составить прямоугольник (рис. 26.5).

Евклид в своём знаменитом трактате «Начала» формулирует теорему Пифагора так: «В прямоугольных треугольниках квадрат на стороне, стягивающей прямой угол, равен (вместе взятым) квадратам на сторонах, заключающих прямой угол».

Если показать, что можно разрезать квадраты, построенные на катетах, на части и составить из этих частей квадрат со стороной, равной гипотенузе, то тем самым будет доказана теорема Пифагора.

На рисунке 26.6 показан один из возможных способов такого разрезания. Квадраты, построенные на катетах, разрезаны на части, пло-

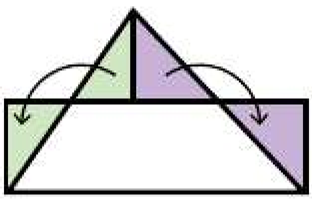


Рис. **26.5**

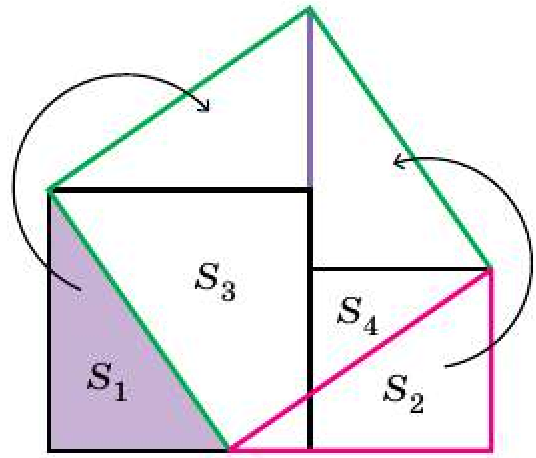


Рис. **26.6**

щади которых равны S_1, S_2, S_3 и S_4. Из этих частей сложен квадрат, построенный на гипотенузе.

Из определения площади многоугольника следует, что равносоставленные многоугольники являются равновеликими. Но совсем неочевидной является такая теорема.

Теорема 26.2

Любые два равновеликих многоугольника являются равносоставленными.

Впервые этот факт доказал в 1832 г. венгерский математик Фаркаш Бойяи. Позднее немецкий математик Пауль Гервин нашёл другое доказательство. Поэтому эту теорему называют теоремой Бойяи — Гервина.

1. Сформулируйте теорему о площади трапеции.
2. По какой формуле вычисляют площадь трапеции?
3. Какие многоугольники называют равносоставленными?
4. Каким свойством обладают площади равносоставленных многоугольников?

Упражнения

26.1. Найдите площадь равнобокой трапеции, основания которой равны 14 см и 16 см, а диагональ — 17 см.

26.2. Чему равна площадь прямоугольной трапеции, основания которой равны 9 см и 16 см, а бо́льшая боковая сторона — $\sqrt{65}$ см?

26.3. Найдите площадь равнобокой трапеции, основания которой равны 14 см и 32 см, а боковая сторона — 15 см.

26.4. Найдите площадь трапеции, изображённой на рисунке 26.7 (длины отрезков даны в сантиметрах).

26.5. Найдите площадь трапеции, изображённой на рисунке 26.8 (длины отрезков даны в сантиметрах).

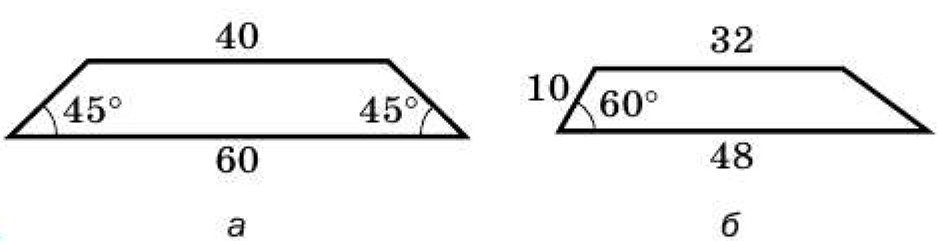


Рис. 26.7

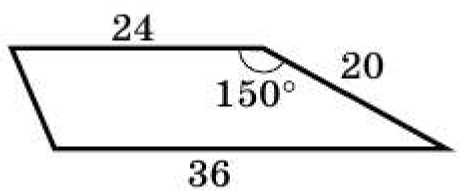


Рис. 26.8

26.6. В равнобокой трапеции диагональ является биссектрисой острого угла и делит среднюю линию трапеции на отрезки длиной 6 см и 12 см. Найдите площадь трапеции.

26.7. Основания прямоугольной трапеции равны 9 см и 17 см, а диагональ является биссектрисой её тупого угла. Вычислите площадь трапеции.

26.8. Точка пересечения биссектрис острых углов при основании трапеции принадлежит другому основанию. Найдите площадь трапеции, если её боковые стороны равны 17 см и 25 см, а высота — 15 см.

26.9. Точка пересечения биссектрис тупых углов при основании трапеции принадлежит другому основанию. Найдите площадь трапеции, если её боковые стороны равны 10 см и 17 см, а высота — 8 см.

26.10. Боковая сторона равнобокой трапеции равна $20\sqrt{3}$ см и образует с основанием угол $60°$. Найдите площадь трапеции, если в неё можно вписать окружность.

26.11. Основания равнобокой трапеции равны 32 см и 50 см. Чему равна площадь трапеции, если в неё можно вписать окружность?

26.12. Меньшая боковая сторона прямоугольной трапеции равна 8 см, а острый угол — $45°$. Найдите площадь трапеции, если в неё можно вписать окружность.

26.13. Бóльшая боковая сторона прямоугольной трапеции равна 28 см, а острый угол — $30°$. Найдите площадь трапеции, если в неё можно вписать окружность.

26.14. Докажите, что прямая, которая проходит через середину средней линии трапеции и пересекает её основания, разбивает данную трапецию на два равновеликих многоугольника.

◆◆

26.15. Найдите площадь равнобокой трапеции, основания которой равны 24 см и 40 см, а диагональ перпендикулярна боковой стороне.

26.16. Диагональ равнобокой трапеции перпендикулярна боковой стороне, которая равна 15 см. Найдите площадь трапеции, если радиус окружности, описанной около неё, равен 12,5 см.

26.17. Диагональ трапеции разбивает её на треугольники, площади которых относятся как 3 : 7. Как относятся площади трапеций, на которые разбивает данную трапецию её средняя линия?

26.18. На сторонах AB и CD параллелограмма $ABCD$ отметили соответственно точки K и M так, что $AK : KB = 3 : 4$ и $DM : MC = 5 : 3$. Найдите отношение площадей четырёхугольников, на которые отрезок KM разбивает данный параллелограмм.

26.19. Докажите, что площадь прямоугольной трапеции, в которую можно вписать окружность, равна произведению её оснований.

26.20. В равнобокую трапецию вписана окружность. Одна из её боковых сторон точкой касания делится на отрезки длиной 4 см и 9 см. Найдите площадь трапеции.

26.21. В прямоугольную трапецию $ABCD$ ($BC \parallel AD$, $AB \perp AD$) вписана окружность с центром в точке O. Найдите площадь трапеции, если $OC = 6$ см, $OD = 8$ см.

26.22. В прямоугольную трапецию вписана окружность радиуса 12 см. Бо́льшая из боковых сторон точкой касания делится на два отрезка, больший из которых равен 16 см. Найдите площадь трапеции.

◆ ◆ ◆

26.23. Диагональ равнобокой трапеции делит высоту, проведённую из вершины тупого угла, на отрезки длиной 15 см и 12 см, а боковая сторона трапеции равна её меньшему основанию. Найдите площадь трапеции.

26.24. Бо́льшая диагональ прямоугольной трапеции делит высоту, проведённую из вершины тупого угла, на отрезки длиной 15 см и 9 см. Бо́льшая боковая сторона трапеции равна её меньшему основанию. Найдите площадь трапеции.

26.25. Диагональ равнобокой трапеции является биссектрисой её острого угла и перпендикулярна боковой стороне. Найдите площадь трапеции, если её меньшее основание равно a.

26.26. Диагонали трапеции перпендикулярны, одна из них равна 48 см, а средняя линия трапеции — 25 см. Найдите площадь трапеции.

26.27. В трапеции $ABCD$ с основаниями BC и AD диагонали перпендикулярны. Найдите площадь трапеции, если диагональ AC равна 20 см, а высота трапеции — 12 см.

26.28. Трапеция $ABCD$ ($BC \parallel AD$) вписана в окружность. Точка O — центр этой окружности. Найдите площадь трапеции, если $\angle BOA = 60°$, а высота трапеции равна h.

26.29. В трапеции $ABCD$ $BC \parallel AD$, точка M — середина стороны AB. Найдите площадь треугольника CMD, если площадь данной трапеции равна S.

26.30. На отрезке, соединяющем середины оснований трапеции, отметили точку и соединили её со всеми вершинами трапеции. Докажите, что образовавшиеся треугольники, прилежащие к боковым сторонам трапеции, равновелики.

26.31. Докажите, что трапеция является равносоставленной с параллелограммом, основание которого равно средней линии трапеции, а высота — высоте трапеции.

26.32. Докажите, что площадь трапеции равна произведению боковой стороны и перпендикуляра, опущенного на прямую, которая содержит эту сторону, из середины другой боковой стороны.

26.33. В четырёхугольнике $ABCD$ углы ABC и ADC прямые, а стороны AB и BC равны (рис. 26.9). Известно, что $BH \perp AD$ и $BH = 1$. Найдите площадь четырёхугольника $ABCD$.

26.34. На рисунке 26.10 изображены два квадрата, стороны которых равны 1 см. Эти квадраты расположены так, что вершина O одного квадрата является точкой пересечения диагоналей другого. Чему равна площадь закрашенного четырёхугольника?

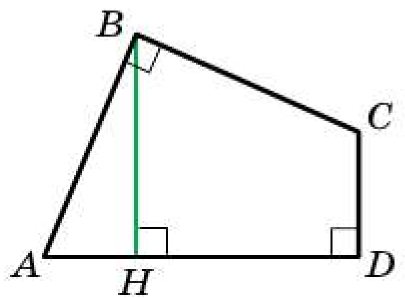


Рис. **26.9**

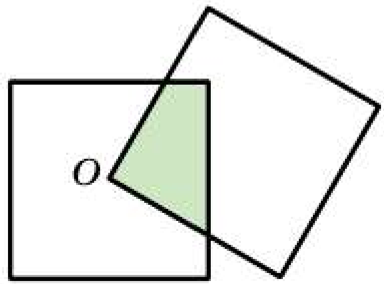


Рис. **26.10**

26.35. В выпуклом пятиугольнике $ABCDE$ $\angle ABC = \angle CDE = 90°$, $BC = CD = AE = 1$ см, $AB + DE = 1$ см. Найдите площадь пятиугольника $ABCDE$.

26.36. Каждая из пяти прямых, пересекающих стороны BC и AD квадрата $ABCD$, делит его на два четырёхугольника, площади которых относятся как 2 : 3. Докажите, что по крайней мере три из этих прямых проходят через одну точку.

Итоги главы 5

Площадь многоугольника

Площадью многоугольника называют положительную величину, которая обладает следующими свойствами:

1) равные многоугольники имеют равные площади;

2) если многоугольник составлен из нескольких многоугольников, то его площадь равна сумме площадей этих многоугольников;

3) за единицу измерения площади принимают единичный квадрат, т. е. квадрат со стороной, равной единице измерения длины.

Площадь прямоугольника

Площадь прямоугольника равна произведению длин его соседних сторон.

Равновеликие многоугольники

Многоугольники, имеющие равные площади, называют равновеликими.

Площадь параллелограмма

Площадь параллелограмма равна произведению его стороны и высоты, проведённой к этой стороне.

Площадь треугольника

- Площадь треугольника равна половине произведения его стороны и проведённой к ней высоты.
- Площадь треугольника равна произведению его полупериметра и радиуса вписанной окружности.

Площадь прямоугольного треугольника

Площадь прямоугольного треугольника равна половине произведения его катетов.

Площадь описанного многоугольника

Площадь описанного многоугольника равна произведению его полупериметра и радиуса вписанной окружности.

Площадь трапеции

- Площадь трапеции равна произведению полусуммы её оснований и высоты.
- Площадь трапеции равна произведению её средней линии и высоты.

Свойство площади равносоставленных многоугольников

Любые два равновеликих многоугольника являются равносоставленными.

Дружим с компьютером

При изучении геометрии в 7 классе вы уже использовали компьютер. В 8 классе вы будете изучать более сложные геометрические фигуры, а значит, сможете усовершенствовать свои умения, освоив более сложные инструменты графических пакетов.

Напомним, что, кроме заданий, приведённых в этом разделе, вы можете использовать разнообразные программы, созданные специально для освоения школьного курса геометрии. Вы можете обращаться к глобальной сети Интернет для поиска таких программ и другой нужной вам информации.

В этом разделе приведены задания, которые вы сможете выполнять с помощью компьютера по мере изучения соответствующих тем. Большинство из них — задания на построение геометрических фигур, которые вы будете выполнять с помощью выбранного вами графического редактора.

Кроме этих заданий, вы можете выполнять рисунки к задачам, в частности решать задачи на построение, не только в тетради, но и с помощью компьютера. В 7 классе вы узнали, что в геометрии построения выполняют с помощью линейки и циркуля. Поэтому для решения задач на построение вам нужно найти среди инструментов графического редактора те, которые выполняют функции линейки и циркуля.

Многоугольник и его элементы

1. Постройте многоугольники, иллюстрирующие теоретические сведения этого параграфа.

Параллелограмм. Свойства параллелограмма

2. Определите, какие свойства параллелограмма надо использовать, чтобы правильно изобразить эту фигуру. Какие инструменты графического пакета надо для этого применить? Нарисуйте параллелограмм и постройте две его высоты, выходящие из одной вершины. Какой инструмент вы используете, чтобы опустить высоту на данную сторону?

Признаки параллелограмма

3. Представьте себе, что нарисован четырёхугольник. Каким образом вы можете проверить, является ли он параллелограммом? Какие инструменты графического пакета можно для этого использовать?

Прямоугольник. Ромб. Квадрат

4. Найдите в графическом редакторе средство, которое позволяет быстро строить различные прямоугольники и квадраты. Какое свойство ромба позволяет легко и правильно построить ромб?

5. Постройте два перпендикулярных пересекающихся отрезка. Представьте себе, что это диагонали четырёхугольника, и постройте этот четырёхугольник. Обязательно ли получится ромб? Каким условием надо дополнить это задание, чтобы полученный четырёхугольник обязательно оказался ромбом?

Средняя линия треугольника

6. Какой инструмент графического редактора вы будете использовать, чтобы найти середину отрезка?

7. Нарисуйте произвольный четырёхугольник. Выполните построение, которое проиллюстрирует ключевую задачу 1 § 6. Как вы проверите, что отрезки, соединяющие середины сторон данного четырёхугольника, образовали параллелограмм?

Трапеция

8. Постройте трапецию. Какие инструменты графического редактора вы будете использовать, чтобы обеспечить параллельность сторон трапеции? Чтобы построить равнобокую трапецию? Чтобы построить прямоугольную трапецию?

Центральные и вписанные углы

9. Нарисуйте окружность и постройте несколько вписанных углов, опирающихся на одну и ту же дугу. Пользуясь инструментами графического редактора, определите их градусные меры.

10. Нарисуйте окружность, постройте центральный и вписанный углы, опирающиеся на одну и ту же дугу. Проверьте, как соотносятся величины этих углов.

Описанные четырёхугольники

11. Найдите оптимальный способ построения рисунков, на которых должны быть изображены окружность, вписанные в окружность и описанные около окружности четырёхугольники. Какое свойство касательной к окружности позволяет правильно изобразить описанный около окружности четырёхугольник?

Теорема Фалеса. Теорема о пропорциональных отрезках

12. Постройте рисунки, иллюстрирующие теорему Фалеса и теорему о пропорциональных отрезках. Измерьте длины нужных отрезков и проверьте, выполняются ли для них утверждения этих теорем. Насколько точ-

но можно измерить отрезки средствами графического редактора, которым вы пользуетесь?

13. Представьте себе, что в вашем графическом редакторе нет инструмента, позволяющего строить параллельные прямые. Как вы можете построить параллельные прямые, используя теорему Фалеса?

Теорема о медианах треугольника. Теорема о биссектрисе треугольника

14. Придумайте и продемонстрируйте способ построить биссектрису треугольника, если отсутствуют средства деления угла пополам и измерения его величины.

Подобные треугольники

15. Освойте инструменты графического редактора, которые позволяют изображать фигуры, имеющие одинаковую форму, но разные размеры. Постройте с помощью этих инструментов подобные треугольники.

16. Постройте графическую иллюстрацию к лемме о подобных треугольниках. Пользуясь указанными инструментами, покажите, что изображённые треугольники действительно подобны.

Первый признак подобия треугольников

17. Постройте два отрезка различной длины. Представьте себе, что это соответственные стороны подобных треугольников. Постройте произвольный треугольник, используя первый из этих отрезков в качестве стороны. Применяя первый признак подобия треугольников, постройте подобный ему треугольник, используя второй отрезок в качестве стороны.

Теорема Менелая. Теорема Чевы

18. Постройте произвольный треугольник и проиллюстрируйте утверждение задачи 16.16.

Второй и третий признаки подобия треугольников

19. Придумайте самостоятельно задание, которое позволило бы с помощью компьютера продемонстрировать второй и третий признаки подобия треугольников.

Метрические соотношения в прямоугольном треугольнике

20. Постройте прямоугольный треугольник и опустите высоту на гипотенузу. Убедитесь, что выполняется лемма § 19.

Теорема Пифагора

21. Часто теорему Пифагора иллюстрируют, построив квадраты на сторонах прямоугольного треугольника. Многие поколения школьников называют этот рисунок «Пифагоровы штаны» и формулируют теорему в шутливой форме: «Пифагоровы штаны на все стороны равны». Постройте этот рисунок.

22. Есть ли в графическом редакторе инструмент для разрезания фигуры на части, которыми далее можно оперировать отдельно?

23. Разрезав на части квадраты, построенные на катетах, можно сложить из этих частей квадрат, построенный на гипотенузе. Для произвольного треугольника поиск таких частей — задача непростая. А вот для равнобедренного треугольника найти такой способ разрезания довольно легко. Какие это части? Постройте равнобедренный прямоугольный треугольник. Постройте такой набор фигур, чтобы, перемещая их, можно было составить либо квадрат, построенный на гипотенузе, либо два квадрата, построенные на катетах.

Тригонометрические функции острого угла прямоугольного треугольника

24. Освойте инструменты калькулятора, позволяющие находить тригонометрические функции острого угла треугольника.

25. Если вы изучаете какой-либо язык программирования, то найдите в этом языке инструменты для нахождения тригонометрических функций.

Решение прямоугольных треугольников

26. При решении задач этого параграфа используйте калькулятор для вычислений.

Понятие площади многоугольника. Площадь прямоугольника

27. Постройте квадрат и примите его за единичный. Скопируйте его несколько раз. Из полученных единичных квадратов сложите несколько различных равновеликих прямоугольников.

Площадь параллелограмма

28. Создайте набор фигур, с помощью которых можно проиллюстрировать доказательство теоремы о площади параллелограмма. Каким свойством площади многоугольника мы при этом пользуемся?

29. Теорема 24.1 справедлива независимо от того, какую из сторон параллелограмма с опущенной на неё высотой выбрать для вычисления

площади. Создайте набор фигур, с помощью которых можно проиллюстрировать это утверждение.

Площадь треугольника

30. Создайте наборы фигур, с помощью которых можно проиллюстрировать доказательства утверждений теоретической части этого параграфа.

Площадь трапеции. Равносоставленные многоугольники

31. Постройте произвольную трапецию. Разрежьте её на части так, чтобы показать, что формула для вычисления площади трапеции является верной.

Проектная работа

Эта рубрика адресована прежде всего тем, кто хочет научиться приобретать знания самостоятельно, творчески мыслить, формировать, выражать и отстаивать свою точку зрения, выдвигать гипотезы, находить наиболее рациональные и нестандартные решения.

Первым шагом, который может помочь в реализации этих целей, является участие в проектной работе.

Проект — это самостоятельное исследование по выбранной теме, которое может выполняться как индивидуально, так и группой учащихся.

Дадим несколько советов по организации работы над проектом и оформлению результатов исследования.

1. При выборе темы необходимо учитывать её актуальность, наличие источников информации в литературе и интернет-ресурсов. Здесь важно ваше желание проявить себя в качестве исследователя в работе именно над выбранной темой.

2. Работа начинается с составления предварительного плана, в котором отражаются замысел и этапы реализации задуманного. После знакомства с основными источниками информации с помощью руководителя проекта составляется окончательный план.

3. Важно чётко сформулировать цели исследования. Они могут быть записаны в такой форме: изучить, описать, проанализировать, доказать, сравнить и т. п.

4. Работа завершается подведением итогов исследования, делаются выводы, намечаются перспективы дальнейшего изучения темы.

5. Примерный объём работы — 10—15 страниц. Дополнительно может прилагаться иллюстративный материал.

6. Работа может быть оформлена в виде реферата, доклада, компьютерной презентации.

Ниже приводится список рекомендуемых тем, которые могут быть выбраны для проектной работы.

1. Фалес Милетский — великий геометр, строитель, астроном

Рекомендуемая литература:

1. *Савин А. П.* Энциклопедический словарь юного математика. — М. : Педагогика, 1989.
2. *Энциклопедия* для детей. Математика. — М. : Аванта+, 2003. Т. 11.

2. Пифагор и его великая теорема

Рекомендуемая литература:

1. *Башмакова И., Лапин А.* Пифагор // Квант. — 1986. — № 1.
2. *Березин В.* Теорема Пифагора // Квант. — 1972. — № 3.

3. *Волошинов А. В.* Пифагор: союз истины, добра и красоты. — М. : Просвещение, 1993.

4. *Воронин С., Кулагин А.* О задаче Пифагора // Квант. — 1987. — № 1.

5. *Глейзер Г. Д.* Поговорим о теореме Пифагора // Математика (еженедельное приложение к газете «Первое сентября»). — 1996. — № 13.

6. *Рубинов Р.* По следам теоремы Пифагора // Квант. — 1981. — № 11.

7. *Халамайзер А. Я.* Пифагор. — М. : Высшая школа, 1994.

8. *Энциклопедия* для детей. Математика. — М. : Аванта+, 2003. Т. 11.

3. Аксиоматический метод в геометрии

Рекомендуемая литература:

1. *Успенский В. А.* Что такое аксиоматический метод? — М. : Ижевск, 2001.

2. *Савин А. П.* Энциклопедический словарь юного математика. — М. : Педагогика, 1989.

3. *Энциклопедия* для детей. Математика. — М. : Аванта+, 2003. Т. 11.

4. Геометрия на клетчатом листе

Рекомендуемая литература:

Смирнов В. А., Смирнова И. М. Геометрия на клетчатой бумаге. — М. : МЦНМО, 2009.

5. Граф как геометрическая модель логической задачи

Рекомендуемая литература:

1. *Барболин М.* Головоломки и графы // Квант. — 1975. — № 2.

2. *Башмаков М.* Паросочетания и транспортные сети // Квант. — 1970. — № 4.

3. *Белага Э.* Арифметика на географической карте // Квант. — 1974. — № 4.

4. *Гуровиц В. М., Ховрина В. В.* Графы. — М. : МЦНМО, 2009.

5. *Мельников О. И.* Незнайка в стране графов. — М. : Книжный дом ЛИБРОКОМ, 2010.

6. *Оре О.* Графы и их применение. — М. : Мир, 1965.

7. *Березина Л.* О графах с цветными рёбрами // Квант. — 1973. — № 8.

6. Замечательные точки треугольника

Рекомендуемая литература:

1. *Готман Э. Г.* Задачи по планиметрии и методы их решения. — М. : Просвещение, 1996.

2. *Прасолов В. В.* Задачи по планиметрии. — М. : МЦНМО, 2006.

3. *Мякишев А. Г.* Элементы геометрии треугольника. — М. : МЦНМО, 2002.

4. *Шарыгин И. Ф.* Геометрия. Планиметрия. — М. : Дрофа, 2001.

5. *Энциклопедия* для детей. Математика. — М. : Аванта+, 2003. Т. 11.

7. Метод вспомогательной окружности

Рекомендуемая литература:

1. *Прасолов В. В.* Задачи по планиметрии. — М. : МЦНМО, 2006.

2. *Готман Э. Г.* Задачи по планиметрии и методы их решения. — М. : Просвещение, 1996.

3. *Шарыгин И. Ф.* Задачи по геометрии. Планиметрия. — М. : Наука, 1982.

8. Равновеликие и равносоставленные фигуры

Рекомендуемая литература:

1. *Болтянский В. Г.* Равновеликие и равносоставленные фигуры // Популярные лекции по математике. — М. : Гостехиздат, 1956. — Вып. 22.

2. *Прасолов В. В.* Задачи по планиметрии. — М. : МЦНМО, 2006.

3. *Шарыгин И. Ф.* Задачи по геометрии. Планиметрия. — М. : Наука, 1982.

Глава 1. **1.10.** 1) 72°, 130°, 78°, 80°; 2) 22°, 230°, 28°, 80°. **1.12.** 10 см. **1.14.** Пятиугольник. **1.15.** *Указание*. Пусть $ABCDEF$ — шестиугольник, каждый угол которого равен 120°. Если провести секущую MN (см. рисунок), то сумма углов пятиугольника $ABMNF$ будет равной 540°. Тогда сумма углов BMN и FNM равна 180°. **1.18.** *Указание*. Постройте треугольник по двум соседним сторонам четырёхугольника и известному углу между ними. Третья сторона этого треугольника является диагональю искомого четырёхугольника. **1.21.** 7. *Указание*. Докажите, что данный внешний угол равен 90°. **1.22.** Нет. *Указание*. $180°(17-2) > 14 \cdot 180°$. **1.25.** *Указание*. Постройте треугольник ABC по двум сторонам AB и BC и углу B между ними. В треугольнике ACD известны сторона AC, прилежащий угол CAD ($\angle CAD = \angle BAD - \angle BAC$) и сумма сторон AD и CD. Постройте треугольник ADC по стороне, прилежащему углу и сумме двух других его сторон. **1.26.** *Указание*. Докажите, что $\triangle AKC = \triangle BKD$. **1.27.** 180°. **1.28.** *Указание*. Пусть K — точка пересечения прямых BC и AD. Докажите, что отрезок MN принадлежит биссектрисе угла AKB. Отдельно рассмотрите случай, когда $BC \parallel AD$. **1.29.** *Указание*. Через произвольную точку плоскости проведите 19 прямых, каждая из которых параллельна одной из сторон 19-угольника. Докажите, что найдутся две совпадающие прямые. **1.30.** 6. *Указание*. Каждый внешний угол многоугольника равен 60° или 120°. **1.31.** *Указание*. Любой треугольник можно разрезать на 6 равнобедренных треугольников (см. рисунок). **1.32.** *Указание*. Если

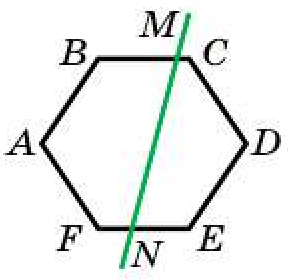


Рисунок к задаче 1.15

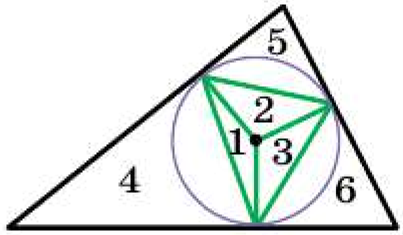


Рисунок к задаче 1.31

разрезать четырёхугольник по диагонали BD и, перевернув треугольник BCD, снова «приложить» его к диагонали BD, то получим равнобедренный треугольник. **1.33.** Не больше двух. *Указание*. Если две несоседние стороны AB и CD равны наибольшей диагонали, то $AB + CD \geqslant AC + BD$, что противоречит задаче 1.23. **2.10.** 90°. **2.11.** 45°, 135°. **2.12.** 48°, 132°. **2.13.** 6 см, 12 см. **2.15.** 9 см, 14 см. **2.17.** 6 см. **2.18.** 32 см. **2.21.** 80 см. **2.22.** 9 см, 24 см. **2.23.** 6 см. **2.26.** 36°, 144°.

2.27. 40 см. **2.28.** 5 см, 9 см. **2.30.** 25 см. **2.31.** 3. **2.32.** 2 : 1. **2.33.** 72°, 108°. **2.34.** 8 см, 12 см или 5 см, 15 см. **2.37.** 60°, 120°. **2.38.** *Указание*. Докажите, что проведённые прямые содержат высоты треугольника ABD. **2.40.** *Указание*. Докажите, что проведённые прямые содержат высоты треугольника $A_1B_1C_1$. **2.41.** *Указание*. Докажите, что точка J — ортоцентр треугольника AMC. **2.43.** *Указание*. Постройте параллелограмм, одна вершина которого совпадает с вершиной данного угла, две другие вершины лежат на сторонах угла, а точка пересечения диагоналей параллелограмма совпадает с данной точкой. **2.45.** *Указание*. Проведите биссектрису BD треугольника ABC. Через точку D проведите прямую, параллельную стороне AB. **2.46.** *Указание*. Постройте параллелограмм, соседними сторонами которого будут отрезки AC и AB. **2.47.** *Указание*. Вершины B и C лежат на серединных перпендикулярах отрезков MN и NK соответственно. Далее воспользуйтесь задачей 2.43. **2.48.** *Указание*. Докажите, что диагонали четырёхугольника содержат высоты треугольников, вершинами которых являются две соседние вершины параллелограмма и точка пересечения его диагоналей. **2.49.** *Указание*. На данной прямой отметьте точки A, M и B так, что $AM = MB = 1$ см. Вне данной прямой в одной полуплоскости от нее отметьте точки K и F так, что $MK = MF = 1$ см. Пусть прямые AF и BK пересекаются в точке C, а прямые AK и BF — в точке H. Докажите, что прямая CH искомая. **3.18.** 120°. *Указание*. На продолжении медианы BM за точку M отметьте точку D такую, что $BM = MD$ (см. рисунок). В треугольнике BDC $\angle BDC = 30°$. **3.19.** *Указание*. Воспользуйтесь ключевой задачей 3.9. **3.21.** *Указание*. На продолжении медианы AM за точку M отложите отрезок MD, равный этой медиане, и рассмотрите треугольник ABD. **3.25.** *Указание*. Постройте прямоугольный треугольник, гипотенуза которого равна удвоенной данной медиане, а катет — данной высоте. **3.28.** *Указание*. На луче BD отметьте точку K так, что $DK = BD$. **5.3.** 6 см, 12 см. **5.4.** 15 см, 25 см. **5.5.** 12 см. **5.30.** 28 см. **5.33.** 48 см. **5.36.** 6 см. **5.37.** 4,5 см. **5.39.** *Указание*. Докажите, что $AC \perp MK$. **5.40.** *Указание*. Постройте равнобедренный прямоугольный треугольник с гипотенузой MK. **5.41.** 75°. **5.42.** *Указание*. Пусть точка F — середина стороны AB. Постройте треугольник FMK. **5.44.** 30°, 60°. *Указание*. Покажите, что в прямоугольном треугольнике ABM гипотенуза AM в 2 раза больше катета BM. **5.45.** 60°. **5.46.** 1) *Указание*. Задача сводится к построению прямоугольного треугольника по гипотенузе и разности катетов. На рисунке изображён

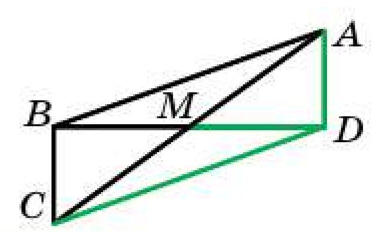


Рисунок к задаче 3.18

прямоугольный треугольник ACB, в котором известны гипотенуза AB и разность катетов. На катете BC отметьте точку M так, чтобы $CM = AC$. Тогда $BM = BC - AC$. Отсюда $\angle AMB = 135°$. Следовательно, можно построить треугольник AMB по сторонам AB и MB и углу AMB. **5.48.** *Указание*. Постройте два прямоугольных треугольника, в каждом из которых один катет равен стороне квадрата, а гипотенузы являются данными отрезками. Докажите равенство этих треугольников. **5.52.** 60°, 120°. *Указание*. Пусть точки M и N — середины сторон BC и AD соответственно. Докажите, что четырёхугольник $ABMN$ — ромб. **5.53.** *Указание*. Соедините середину стороны AB с точкой D. **5.54.** *Указание*. Докажите, что биссектриса угла ABD параллельна биссектрисе DM. Далее воспользуйтесь ключевой задачей 1 § 16 учебника «Геометрия. 7 класс». **5.55.** *Указание*. Докажите, что точка N принадлежит серединному перпендикуляру отрезка OC, где точка O — середина AC. **5.56.** *Указание*. Постройте равносторонний треугольник BO_1C так, чтобы точка O_1 принадлежала квадрату. Покажите, что $\angle O_1AD = \angle O_1DA = 15°$. Отсюда следует, что точки O и O_1 совпадают. **5.57.** *Указание*. Постройте прямоугольник $BFMC$, равный прямоугольнику $ABCD$ (см. рисунок). Пусть точка K принадлежит стороне FM и $FK = AN$. Тогда $\angle DBK = \angle ANB + \angle ADB$. Докажите, что $BK = KD$ и $BK \perp KD$. **5.58.** 45°, 45°, 90°. *Указание*. Разбейте квадрат $ABCD$ на 25 квадратов, как показано на рисунке. Воспользуйтесь тем, что $\triangle PMQ = \triangle DNQ$. **6.7.** 28 см. **6.14.** $MK = 4$ см. *Указание*. Проведите

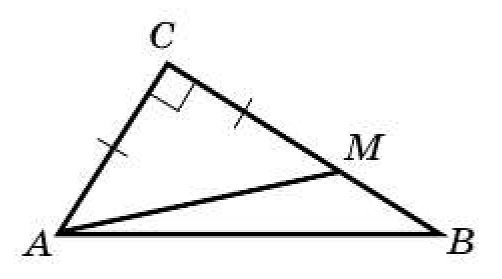


Рисунок к задаче 5.46 (1)

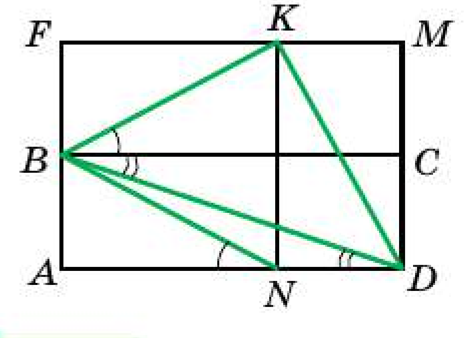


Рисунок к задаче 5.57

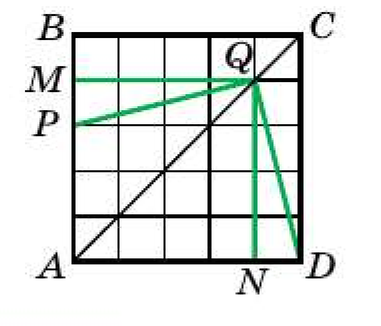


Рисунок к задаче 5.58

среднюю линию треугольника ABC. **6.15.** 9 см. *Указание*. Рассмотрите треугольник, для которого отрезок MK является средней линией. **6.18.** *Указание*. Докажите, что четырёхугольник $EKFM$ — параллелограмм (см. рисунок). **6.20.** *Указание*. Соедините точку M с серединой

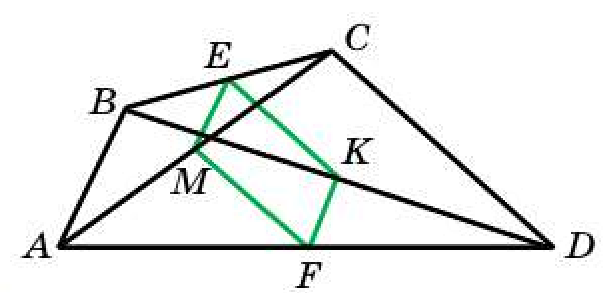


Рисунок к задаче 6.18

отрезка AH. **6.21.** $\angle BAC = 60°$, $\angle BCA = 90°$. **6.23.** *Указание*. Рассмотрите ломаную $DMKE$, где точки M и K — соответственно середины сторон AB и BC. **6.24.** *Указание*. Воспользуйтесь тем, что биссектриса угла, перпендикулярная отрезку, концы которого лежат на сторонах угла, делит этот отрезок пополам. Все указанные точки лежат на прямой, содержащей среднюю линию треугольника ABC, параллельную стороне BC. **6.26.** *Указание*. Докажите, что отрезок MN пересекает диагональ AC в её середине. **6.28.** *Указание*. Докажите, что середины сторон четырёхугольника $ABMC$ являются вершинами ромба. **6.29.** *Указание*. На луче BD отметьте точку F так, чтобы $DF = DB$. Точка C лежит на прямой, проходящей через точку F параллельно хорде AD. **6.30.** *Указание*. Пусть точки M, K и F — середины отрезков AB, AD и AC соответственно. Определите, каким прямым принадлежат высоты треугольника MKF. **6.31.** *Указание*. Пусть E, F и K — середины отрезков AC, BC и BD соответственно. Докажите, что треугольник EFK равнобедренный. **6.32.** *Указание*. Докажите, что середины сторон четырёхугольника $ABMC$ являются вершинами ромба. **6.33.** $\frac{\alpha}{2}$. *Указание*. Проведите среднюю линию DK треугольника ABC. Докажите, что треугольник EDK равнобедренный. **7.6.** 16 см, 34 см. **7.8.** 16 см. **7.9.** 50°, 60°. **7.15.** 7,2 см, 10,8 см. **7.17.** $2h$. **7.18.** 8 см, 20 см, 20 см, 20 см. **7.19.** 12 см, 12 см, 12 см. **7.20.** 60°, 120°. **7.21.** 8 см, 16 см. **7.22.** 60°, 120°. **7.23.** Если острый угол трапеции равен 45°. **7.29.** $\frac{3a}{4}$. **7.30.** 72°, 108°. **7.31.** 8 см. **7.32.** *Указание*. Через одну из вершин меньшего основания проведите прямую, параллельную боковой стороне трапеции. **7.36.** 1) *Указание*. Через одну из вершин меньшего основания проведите прямую, параллельную боковой стороне трапеции. Задача свелась к построению треугольника по трём сторонам. **7.38.** *Указание*. Через середину меньшего основания трапеции проведите отрезки, параллельные боковым сторонам. **7.39.** 8 см, 2 см. **7.40.** 90°. *Указание*. Отметьте на основании AD точку M такую, что $CM \parallel AB$. **7.41.** 3 см. *Указание*. Через вершину B проведите прямую, параллельную диагонали AC. **7.42.** *Указание*. На продолжении отрезка AD за точку D отложите отрезок DE, равный основанию BC. **7.43.** Да. *Указание*. Проведите через точку M прямые, параллельные сторонам треугольника, и рассмотрите диагонали образовавшихся равнобоких трапеций. **7.44.** *Указание*. Из точки C опустите перпендикуляр CB_1 на сторону угла, содержащую точку B. Проведите среднюю линию трапеции $BDCB_1$.

Глава 2. **8.17.** 120°, 30°. **8.18.** 10°. **8.19.** 40°, 40°, 100°. **8.20.** 120°, 20°, 40°. **8.22.** 56°, 56°, 68°. **8.27.** 60°, 120°. *Указание*. Докажите, что данный параллелограмм является ромбом. **8.37.** *Указание*. Продлите биссектрису BK до пересечения с описанной окружностью треугольника ABC. Далее воспользуйтесь ключевой задачей 8.36. **8.38.** 22,5°, 67,5°, 90°. **8.40.** *Указание*. Воспользуйтесь ключевой задачей 8.36. **8.42.** *Указание*. Воспользуйтесь ключевой задачей 8.36. **8.44.** *Указание*. Опустите из вершин A и B высоты треугольника ABC. **8.45.** *Указание*. Воспользуйтесь ключевой задачей 1 § 8. **8.47.** *Указание*. Пусть O — точка пересечения диагоналей параллелограмма $ABCD$, точка M — середина стороны AD (см. рисунок). Тогда $OM = \frac{1}{2}AB$. Треугольник AOD можно построить (см. задачу 8.46). **8.49.** Искомое ГМТ состоит из двух полуокружностей и четырёх лучей (см. рисунок), точки A и B

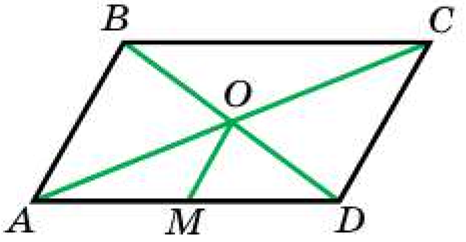


Рисунок **к задаче 8.47**

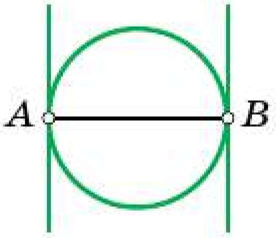


Рисунок **к задаче 8.49**

ему не принадлежат. **8.50.** 165°. *Указание*. Докажите, что $\angle ACB = 150°$. Далее воспользуйтесь ключевой задачей 1 § 16 учебника «Геометрия. 7 класс». **8.51.** 45°. *Указание*. Докажите, что $\angle C_1AB + \angle B_1AC = \angle BAC$. **8.52.** 60°. **8.53.** *Указание*. Докажите, что точки H, O и J принадлежат ГМТ, из которых отрезок BC виден под углом 120°. **8.54.** *Указание*. Одна и та же окружность является описанной для всех указанных треугольников. Центр этой окружности может быть внутренней точкой только одного из этих треугольников. **8.55.** 90°. *Указание*. Докажите, что $\triangle ACE = \triangle BDE$. **8.56.** *Указание*. Постройте окружность с центром O_1 и радиусом, равным разности радиусов данных окружностей. Проведите через точку O_2 касательную к построенной окружности. **8.57.** *Указание*. Пусть точка O — центр вписанной окружности треугольника ABC, в котором известны угол B и сторона AC. Докажите, что $\angle AOC = 90° + \frac{1}{2}\angle B$. В треугольнике AOC известны сторона AC, угол AOC и высота, проведённая из вершины O (радиус вписанной окружности). Далее см. задачу 8.45. **8.58.** *Указание*. На рисунке изо-

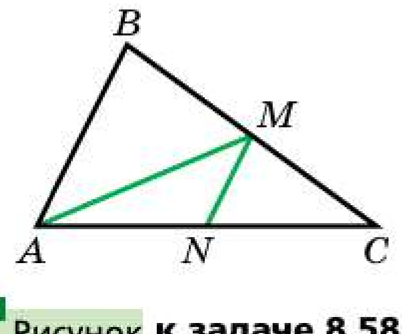


Рисунок **к задаче 8.58**

бражён треугольник ABC, в котором известны сторона AC, угол B и медиана, проведённая к стороне BC. Проведите среднюю линию MN треугольника ABC. Тогда $\angle NMC = \angle B$. Постройте геометрическое место точек X таких, что $\angle NXC = \angle B$. **8.59.** *Указание*. Докажите, что $\angle AOD = \angle ACD = 2\angle ABD$. **8.60.** *Указание*. Пусть M_1, M_2, M_3 и M_4 — данные точки. На отрезках M_1M_2 и M_3M_4 как на диаметрах постройте окружности. Этим окружностям принадлежат две противолежащие вершины квадрата. Диагональ квадрата делит дуги этих окружностей пополам. **9.3.** $60°$. **9.4.** $35°$. **9.10.** 2α. **9.12.** $180° - \alpha$. **9.14.** α. **9.16.** Точка касания. *Указание*. Воспользуйтесь ключевой задачей 3 § 9. **9.19.** *Указание*. Докажите, что $\angle NAC = \angle ABC$. Далее воспользуйтесь утверждением, обратным ключевой задаче 1 § 9. **9.20.** *Указание*. Докажите, что $\angle KMC = \frac{1}{2}\angle CAB$. **9.21.** *Указание*. Докажите, что $\angle PAO = \angle ADB$. **9.22.** $30°$. *Указание*. Найдите угол AEC, а далее воспользуйтесь ключевой задачей 4 § 9. **9.23.** $80°$, $70°$. *Указание*. Воспользуйтесь ключевой задачей 5 § 9. **9.24.** $160°$. **9.25.** $20°$. *Указание*. Точки A, B и C лежат на окружности с центром K. **9.26.** 5 см. **9.27.** *Указание*. Докажите, что точка M — центр окружности, которой принадлежат точки A, B, O и H. **9.28.** *Указание*. Докажите, что точка A лежит на окружности с центром O и радиусом OC. Для этого покажите, что $\angle COD = 2\angle BAC$. **9.29.** $90° - 2\alpha$. *Указание*. Покажите, что $\angle AMC = 135°$ (см. рисунок). Тогда точки A, M и C лежат на окружности с центром B. **9.31.** *Указание*. Докажите, что DA — биссектриса угла BDK (см. рисунок). Для этого проведите через точку D касательную к данным окружностям. **9.32.** *Указание*. Пусть отрезки AK и BK пересекают окружность мень-

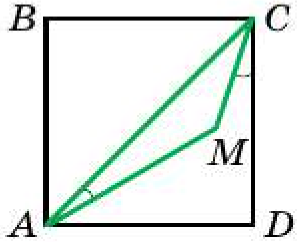


Рисунок к задаче 9.29

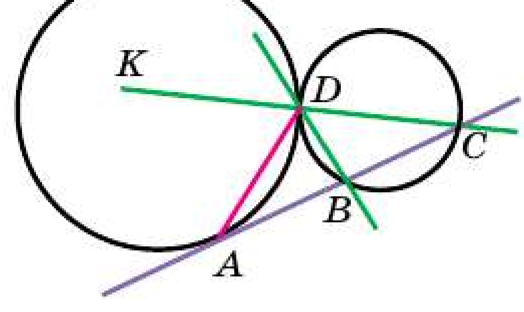


Рисунок к задаче 9.31

шего радиуса в точках F и E соответственно. Докажите, что $FE \parallel AB$. Для этого проведите через точку K общую касательную к двум данным окружностям. **10.6.** $88°$, $74°$, $92°$, $106°$. **10.7.** $62°$, $118°$. **10.10.** $60°$, $120°$. **10.14.** Окружность с диаметром AB, за исключением точки A. **10.15.** *Указание*. Воспользуйтесь ключевой задачей 10.8 (2). **10.16.** $15°$.

Указание. Докажите, что точки A, M, J и C лежат на одной окружности. **10.17.** *Указание*. Выразите углы PNC и POC через угол A. **10.20.** *Указание*. Около четырёхугольников $ABKH$ и $HKCP$ можно описать окружности. **10.21.** *Указание*. Воспользуйтесь задачей 10.8. **10.23.** $\frac{d}{2}$. *Указание*. Докажите, что угол между диагональю и основанием трапеции равен $60°$. Далее воспользуйтесь ключевой задачей 1 § 7. **10.24.** *Указание*. Воспользуйтесь задачей 10.8. **10.25.** *Указание*. Воспользуйтесь тем, что около четырёхугольников $AMBP$ и $PBNC$ можно описать окружности. **10.26.** *Указание*. Четырёхугольники $KBMC$ и $LDMC$ вписанные. **10.27.** *Указание*. $\angle APQ = \angle AMQ$. **10.28.** *Указание*. На стороне CB отметьте точку C_1 такую, что $C_1A = C_1B$. Докажите, что четырёхугольник ACC_1D вписанный. **10.29.** *Указание*. Докажите, что точка H принадлежит окружности, описанной около четырёхугольника $OMBN$. **10.30.** *Указание*. На отрезках AB и CH как на диаметрах постройте окружности. Покажите, что эти окружности пересекаются в точках A_1 и B_1. **10.31.** $40°$. *Указание*. Докажите, что точка пересечения отрезков AF и CD — центр описанной окружности треугольника ABC. **10.32.** *Указание*. Докажите, что около четырёхугольника $AMOK$ можно описать окружность, и воспользуйтесь тем, что биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке. **10.33.** $60°$. *Указание*. Обозначив $\angle N = \alpha$, выразите через α угол AOB. **10.34.** *Указание*. Докажите, что около четырёхугольника $ACBO$ можно описать окружность. **10.35.** *Указание*. Докажите, что угол CPB не изменяет свою величину. **10.36.** *Указание*. На основании BC отметьте такую точку K, что $BK = BD$. Докажите, что около четырёхугольника $ABKD$ можно описать окружность. **10.37.** $90°$. *Указание*. Пусть точка N — середина отрезка AD. Докажите, что точка M лежит на окружности, описанной около прямоугольника $ABKN$. Эту задачу можно решить также способом, описанным в решении задачи 5.58. **10.38.** $90°$. *Указание*. Пусть перпендикуляр BH пересекает сторону AD в точке N. Докажите, что четырёхугольник $NQCD$ — прямоугольник. Покажите, что точка H лежит на окружности, описанной около этого прямоугольника. **10.39.** *Указание*. На луче BM отметьте точку D так, чтобы $BM = MD$. Докажите, что точки C, K, A и D лежат на одной окружности. **11.6.** $90°$. **11.7.** 6 см. **11.9.** 196 см. **11.10.** 6 см. **11.11.** *Указание*. Пусть общая касательная, проходящая через точку касания окружностей, пересекает отрезки AB и CD в точках M и N соответственно. Докажите, что MN — средняя линия трапеции $ABCD$. **11.16.** *Указание*. Докажите, что $\smile MN + \smile QP = 180°$. **11.19.** *Указание*. Докажите, что условие равносильно такому утверждению: точки касания являются вершинами прямоугольника или равнобокой трапеции. **11.20.** *Указание*.

Проведите среднюю линию DE треугольника ABC. Докажите, что прямая DE касается окружности, вписанной в треугольник ABC. **11.21.** *Указание*. Воспользовавшись задачей 11.17, найдите точку F, в которой окружность, вписанная в треугольник ADC, касается стороны AC. Центр вписанной окружности треугольника ADC лежит на прямой, которая перпендикулярна стороне AC и проходит через точку F, и одновременно принадлежит ГМТ, из которых отрезок AC виден под углом, равным $180° - \frac{1}{2}\angle B$.

Глава 3. 12.6. 12 см. **12.7.** 4 см. **12.8.** 6 см, 45°. **12.10.** 20 см, 24 см. **12.12.** 8 см, 12 см. **12.15.** 6 см, 5 см, 6 см. **12.16.** *Указание*. Точка пересечения биссектрис — это вершина прямоугольного треугольника, гипотенузой которого является боковая сторона трапеции. Рассмотрите медиану этого треугольника, проведённую к гипотенузе, и докажите, что она параллельна основаниям трапеции. **12.17.** 7 : 9. *Указание*. На отрезке AD отметьте точку K так, что $MK \parallel BD$. Тогда $AK : KD = 2 : 7$. Пусть F — точка пересечения отрезков CM и BD. Тогда $MF : FC = KD : DC$. **12.18.** 3 : 5. **12.19.** 3 : 5. *Указание*. Проведите через точку K прямую, параллельную прямой AM. **12.20.** 1) 3 : 7. *Указание*. Проведите через точку M прямую, параллельную прямой BK; 2) 2 : 3. *Указание*. Проведите через точку K прямую, параллельную прямой CM. **12.21.** 3 : 8. **12.23.** 2) *Указание*. Пусть дан угол ABC. Проведите прямую OK, параллельную лучу BC (точка K принадлежит стороне AB). На луче KA отметьте точку M такую, что $MK : KB = 2 : 3$. **12.24.** 1 см. **12.26.** 3 см. **12.27.** 108°. *Указание*. Через точку C_1 проведите прямую C_1D, параллельную биссектрисе AA_1 (точка D лежит на стороне CB). Докажите, что треугольник C_1CD равнобедренный. **12.28.** 4 : 1. **12.29.** $a + b$. *Указание*. Пусть O — точка пересечения диагоналей параллелограмма. Проведите перпендикуляры AM, OK и CE к прямой, проходящей через точку B, и покажите, что $OK = \frac{a+b}{2}$. **12.30.** *Указание*. Проведите серединный перпендикуляр хорды C_1A_1 окружности, описанной около четырёхугольника AC_1A_1C. **12.31.** *Указание*. Из центра O окружности, описанной около четырёхугольника $ABCD$, опустите перпендикуляр на диагональ AC. **13.5.** 21 см, 15 см. **13.6.** 45 см, 18 см. **13.7.** 30 см, 50 см. **13.11.** 45 см. **13.13.** 9 см. **13.14.** 50 см. **13.15.** 3 : 2. **13.18.** 3) *Указание*. Постройте прямоугольный треугольник BDK, у которого катет BD равен данной высоте, а гипотенуза BK — данной медиане. По заданному углу и углу BKD найдите угол между двумя медианами треугольника. **13.19.** 2) *Указание*. Пусть ABC — искомый треугольник, медианы AA_1 и CC_1 которого пересекаются в точке M. Треугольник AMC можно построить по двум сторонам и высоте, проведённой к третьей стороне. **13.20.** *Указание*. Точки P и Q — точки пересечения медиан треугольников ABC и ACD соответственно. Пусть точка O — середина диагонали AC. Докажите, что точки B, P, O, Q и D лежат на одной прямой. **13.22.** 1 : 12. *Указание*. Пусть хорда AP пересекает сторону BC в точке F. Найдите отношение $BF : FC$. **13.24.** *Указание*. Вершина треугольника принадлежит ГМТ, из которых одна из медиан видна под данным углом. **14.7.** 33 м. **14.14.** 6 см. **14.15.** 9 см. **14.16.** 40 см, 60 см. **14.18.** 36 см. **14.19.** 8 см. **14.20.** 4,8 см. *Указание*. Через вершину A проведите прямую, параллельную биссектрисе BD. **14.21.** $\frac{2ab}{a+b}$. **14.22.** *Указание*. Пусть ABC — искомый треугольник (см. рисунок), AB и BC — данные стороны, BK — данная биссектриса. На продолжении стороны AB за точку B отложим отрезок BF, равный отрезку BC. Докажите, что $BK \parallel FC$. Из подобия треугольников ABK и AFC следует, что $\frac{FC}{BK} = \frac{AF}{AB}$. Постройте отрезок FC (см. задачу 12.22). Треугольник FBC можно построить по трём сторонам. **15.8.** 30 см, 6 см. **15.9.** 10,5 см, 13,5 см. **15.15.** 42 см. **15.16.** 10 см, 14 см. **15.17.** 12,5 см, 3,5 см. **15.19.** 12 м. **15.23.** 24 см. **15.24.** 16 см. **15.26.** 16 см. **15.27.** 5 см. **15.28.** 10 см. **15.29.** 27 см. **15.30.** 2) 36 см. **15.32.** 10 см. **15.33.** 6 см. **15.34.** 10 см. **15.35.** $\frac{ah}{a+h}$. **15.36.** 27 см, 15 см. **15.37.** $MK = \frac{4}{5}$ см, $AM = \frac{2}{5}$ см. *Указание*. Докажите, что $\angle AKM = \angle MCB$. **15.38.** *Указание*. Докажите, что $\angle CDA = \angle CBD$ и $\angle CDB = \angle CAD$. **15.39.** $\sqrt{2}$ см. *Указание*. Докажите, что $\triangle ABC \sim \triangle MAC$. **15.40.** 30 см, 33 см. **15.41.** 42 см, 66 см. **15.42.** *Указание*. Продлите высоты до пересечения с описанной окружностью. Воспользуйтесь ключевой задачей 8.30. **15.43.** 6 см. *Указание*. Перемножьте равенства, заданные в условии задачи. **15.45.** *Указание*. Воспользовавшись тем, что $\triangle CBO \sim \triangle CAB$ и $\triangle CBO \sim \triangle DBC$, докажите, что $CO \cdot CA = BO \cdot BD$. **15.46.** *Указание*. Пусть прямая MO пересекает основания трапеции в точках E и F (см. рисунок). Дока-

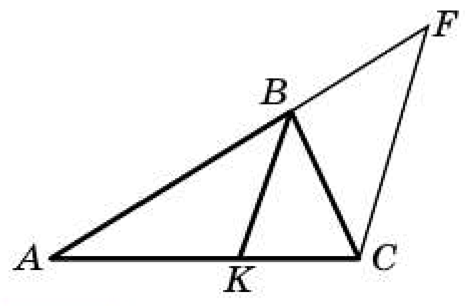


Рисунок к задаче 14.22

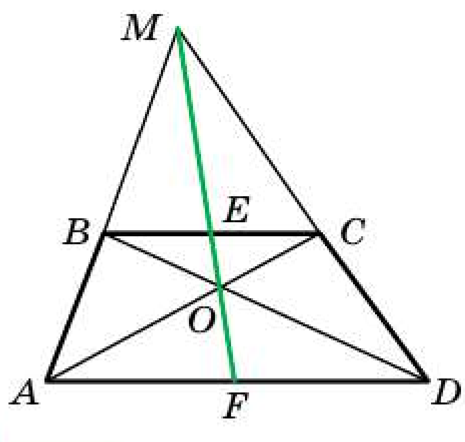


Рисунок к задаче 15.46

жите, что $\frac{BE}{AF} = \frac{EC}{FD}$ и $\frac{BE}{FD} = \frac{EC}{AF}$. **15.47.** *Указание*. Воспользуйтесь задачей 15.46. **15.49.** *Указание*. Докажите, что $\triangle CBM \backsim \triangle NCB$. **15.50.** *Указание*. Можно записать, что $KF \cdot FT = PF \cdot FM$, $FE \cdot DF = PF \cdot FM$. Воспользуйтесь тем, что $DK = KE = ET$. **15.51.** *Указание*. Примените теорему Птолемея к четырёхугольнику $ACDB$. Воспользуйтесь тем, что $DC = DB > \frac{1}{2}BC$. **15.53.** *Указание*. Примените теорему Птолемея к четырёхугольнику $ACDE$. **16.1.** $\frac{CF}{FC_1} = 4$, $\frac{AF}{FA_1} = \frac{7}{8}$. **16.2.** $\frac{13}{12}$. *Указание*. Применив теорему Менелая к треугольнику CBB_1, найдите отношение $BA_1 : A_1C$. Далее примените теорему Менелая к треугольнику AA_1C. **16.3.** $\frac{AP}{PB} = 1$, $\frac{NP}{PM} = 3$. **16.8.** 2 : 1. **16.9.** *Указание*. Пусть продолжения боковых сторон AB и DC трапеции $ABCD$ пересекаются в точке M, а точка F — середина основания AD. К треугольнику AMD и чевианам AC, DB и MF примените теорему Чевы. **16.10.** *Указание*. Пусть прямые AB и CD пересекаются в точке E. Точки E, M и N лежат на одной прямой. Примените теорему Чевы к треугольнику AED. **16.11.** $\frac{2}{5}$. *Указание*. Пусть прямые BC и FE пересекаются в точке K. Докажите, что $BK = \frac{1}{2}AF$. Примените теорему Менелая к треугольнику ABC. **16.12.** *Указание*. Пусть O — точка пересечения диагоналей параллелограмма. К треугольнику AOD и точкам N, M и B примените теорему Менелая. **16.13.** *Указание*. К треугольникам ABC и ADC и прямым соответственно MN и KP примените теорему Менелая. **16.14.** *Указание*. Примените теорему Менелая к треугольнику $O_1O_2O_3$. **16.15.** *Указание*. Воспользуйтесь ключевой задачей 15.30 (1). **16.16.** *Указание*. Примените теорему Менелая к треугольнику, вершины которого являются серединами сторон треугольника ABC. **16.17.** *Указание*. Примените теорему Чевы к треугольнику, вершины которого являются серединами сторон треугольника ABC. **16.18.** *Указание*. Проведём через точку B прямую, параллельную стороне AC, и обозначим через M_1 и K_1 точки пересечения этой прямой с прямыми B_1C_1 и B_1A_1 соответственно (см. рисунок). Для решения до-

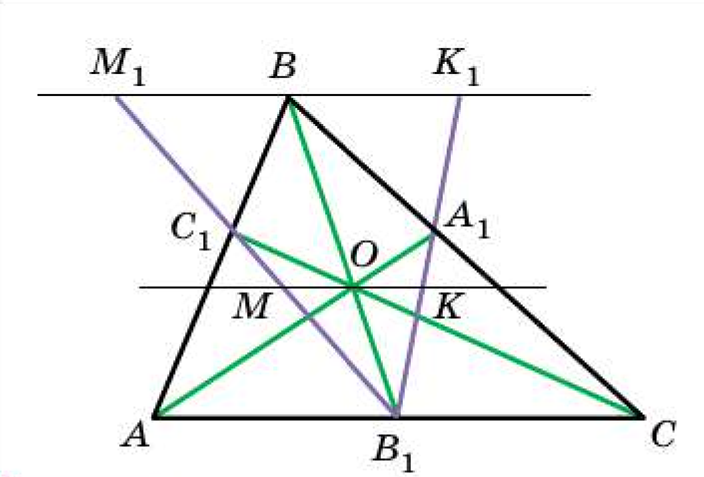


Рисунок к задаче 16.18

статочно доказать, что $BM_1 = BK_1$. Из подобия треугольников AB_1C_1 и BM_1C_1 имеем: $\frac{BM_1}{AB_1} = \frac{BC_1}{AC_1}$, отсюда $BM_1 = \frac{AB_1 \cdot BC_1}{AC_1}$. Аналогично из подобия треугольников CB_1A_1 и BK_1A_1 можно получить: $BK_1 = \frac{CB_1 \cdot BA_1}{CA_1}$. Имеем: $\frac{BM_1}{BK_1} = \frac{AB_1 \cdot BC_1 \cdot CA_1}{AC_1 \cdot CB_1 \cdot BA_1} = 1$. **16.19.** *Указание*. Проведите через точку B прямую, параллельную стороне AC, и обозначьте через K и F точки пересечения этой прямой с прямыми HA_1 и HC_1 соответственно. Воспользуйтесь подобием треугольников HA_1C и KA_1B, а также подобием треугольников HC_1A и FC_1B. **17.7.** *Указание*. Воспользуйтесь тем, что прямые OA_1 и AH, где H — ортоцентр треугольника ABC, параллельны. **17.9.** $\frac{a}{4}$. *Указание*. Пусть точка E — середина отрезка AH, где точка H — ортоцентр треугольника ABC, точка M — середина стороны BC, точка A_1 — основание высоты, проведённой из вершины A. Докажите, что искомое расстояние — длина средней линии треугольника EMA_1. **17.10.** *Указание*. Воспользуйтесь задачей 8.34. **17.11.** *Указание*. Воспользуйтесь тем, что окружность девяти точек треугольника ABC содержит середины сторон треугольников ABH, BCH и CAH. **17.12.** *Указание*. Прямая Эйлера проходит через центр окружности девяти точек треугольника. Также воспользуйтесь задачей 17.11. **17.13.** *Указание*. Воспользовавшись ключевой задачей 8.31, докажите, что отрезок, соединяющий вершину A с ортоцентром, равен радиусу описанной окружности. **17.14.** *Указание*. Воспользовавшись ключевой задачей 8.31, докажите, что отрезок, соединяющий вершину A с ортоцентром, равен радиусу описанной окружности. **17.15.** *Указание*. Докажите, что первая окружность является окружностью девяти точек треугольника ABK, где K — точка пересечения прямых AM и BN. **18.7.** 18 см, 30 см. **18.8.** 50 см, 20 см. **18.10.** 6 см. **18.12.** Да. **18.13.** $\frac{ab}{a+b}$. *Указание*. Докажите, что $\triangle KBM \backsim \triangle ABC$ с коэффициентом подобия $\frac{b}{a+b}$. **18.16.** 2 см. **18.17.** 6 см. *Указание*. Докажите, что $\triangle ABC \backsim \triangle BDC$. **18.18.** *Указание*. Пусть окружности пересекаются в точках E и F. Для двух пар хорд AB и EF, CD и EF примените ключевую задачу 3 § 15. **18.19.** *Указание*. Докажите, что $\triangle MAC \backsim \triangle MCB$. Далее воспользуйтесь утверждением, обратным утверждению ключевой задачи 1 § 9. **18.20.** *Указание*. Пусть O — точка пересечения диагоналей параллелограмма. Тогда $OM \cdot OC = OB \cdot OD$. Отсюда $OM \cdot OA = OB^2 = OD^2$. **18.21.** *Указание*. Проведите в точке B касательную к описанной окружности. **18.22.** *Указание*. Докажите, что $\triangle BKO \backsim \triangle BOA$ и $\triangle OMA \backsim \triangle BOA$. **18.23.** *Указание*. Докажите, что из подобия треугольников BMC и CMK следует подобие треугольников ABM и KAM. **18.24.** *Указание*. Имеем: $\frac{BM}{MC} = \frac{AB}{AC}$. С учётом равенств $BM = CN$ и $AB = BC$ воспользуйтесь ключевой задачей 3 § 18. **18.25.** *Указание*. На продолжении стороны AC за точку A отметьте точку D так, чтобы $AD = AB$. Воспользовавшись заданным в условии задачи равенством, докажите, что $\triangle DBC \backsim \triangle BAC$.

Глава 4. **19.5.** 15 см, 20 см. **19.6.** 30 см, 24 см. **19.7.** $2\sqrt{5}$ см, $4\sqrt{5}$ см. **19.8.** 14,5 см. **19.9.** 12 см. **19.10.** 62 см. **19.11.** 12,5 см. **19.12.** 12,8 см. **19.13.** 2,5. **19.14.** 26 см, 39 см. **19.15.** 5 см. **19.16.** $\frac{26}{3}$ см. **19.20.** 7 см, 13 см, 15 см, 21 см. **19.22.** 196 см. **19.23.** 18 см. **19.24.** 12 см. **19.25.** *Указание*. $AB_2^2 = AB_1 \cdot AC$, $AC_2^2 = AC_1 \cdot AB$. Воспользуйтесь ключевой задачей 1 § 18. **20.11.** 13 см. **20.12.** 10 см. **20.13.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **20.14.** $a\sqrt{2}$. **20.15.** а) $\sqrt{6}$ см; б) $\sqrt{3}$ см; в) $4\sqrt{2}$ см. **20.16.** а) $\sqrt{2}$ см; б) 1 см. **20.17.** $4\sqrt{5}$ см. **20.18.** $4\sqrt{10}$ см. **20.19.** $4\sqrt{13}$ см. **20.20.** $4\sqrt{5}$ см. **20.21.** 2 см или 18 см. **20.22.** 24 см. **20.23.** 1,5 см, 22,5 см. **20.24.** 20 см. **20.25.** 20 см. **20.26.** 8 см, 6 см, 10 см. **20.27.** 6 см, $2\sqrt{73}$ см. **20.28.** 168 см. **20.29.** 200 см. **20.32.** $8\sqrt{10}$ см. **20.33.** $12\sqrt{3}$ см. **20.34.** $2\sqrt{65}$ см. **20.35.** $12\sqrt{5}$ см. **20.36.** 128 см. **20.37.** 162 см. **20.38.** 54 см. **20.39.** $8\sqrt{10}$ см. **20.40.** 10 см, $4\sqrt{13}$ см, $2\sqrt{73}$ см. **20.41.** 26 см. **20.43.** 13 см. **20.44.** *Указание*. Через вершину меньшего основания трапеции проведите прямую, параллельную диагонали. **20.45.** 7 см. *Указание*. Проведите диаметр BD и рассмотрите трапецию $ACBD$. **20.46.** *Указание*. Воспользуйтесь леммой из § 17. **20.47.** $\frac{5\sqrt{2}}{2}$ см. *Указание*. С помощью теоремы Птолемея найдите CD. Докажите, что $\angle KCD = 90°$. **20.48.** *Указание*. Проведите отрезок CD так, чтобы $CD = AC$ и $\angle DCM = \angle MCA$ (см. рисунок). Докажите, что $\angle MDN = 90°$ и $MD = AM$, $ND = BN$. **21.14.** 45°, 135°. **21.18.** 1) 1; 2) 0. **21.19.** 0,28; 0,96; $\frac{7}{24}$; $\frac{24}{7}$. **21.20.** $\frac{1}{6}$. *Указание*. Из подобия треугольников AMC и BDC

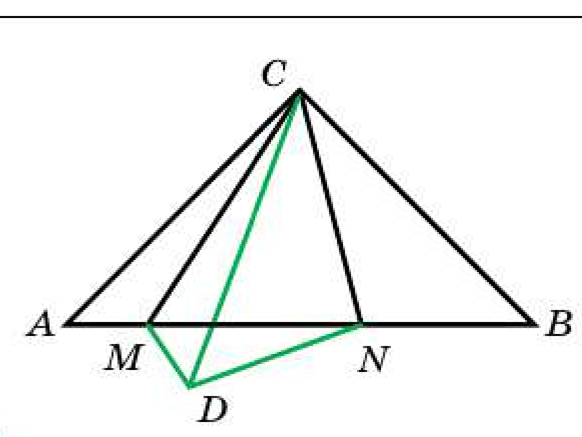


Рисунок к задаче 20.48

следует, что $\frac{AC}{BC} = \frac{AM}{BD} = \frac{1}{3}$. **21.21.** $\frac{6}{7}$. *Указание.* Воспользуйтесь тем, что $\frac{KC}{AC} = \frac{BD}{AB}$. **21.23.** *Указание.* Из точки F опустите перпендикуляр на отрезок ED. Найдите тангенсы углов E и B. **21.24.** $60°$. *Указание.* Из точки M опустите перпендикуляр на основание треугольника. **21.25.** *Указание.* Воспользуйтесь тем, что $AH = 2OM$, где точка M — середина стороны BC, точка O — центр описанной окружности. **21.26.** $60°$. **21.27.** $45°$. **21.29.** *Указание.* Воспользуйтесь теоремой Чевы. **22.12.** $45°$. **22.15.** $2a$, $a\sqrt{3}$. **22.16.** a, $a\sqrt{3}$. **22.17.** 8 см. **22.18.** 16 см. **22.19.** 15 см. **22.20.** $4\sqrt{2}$ см. **22.21.** $\frac{h}{\cos\frac{\beta}{2}}$. **22.22.** $\frac{h}{\sin\alpha}$, $\frac{h}{\cos\alpha}$, $\frac{h}{\sin\alpha\cos\alpha}$.

24.4. 300 см^2. **24.5.** 120 см^2. **24.6.** $108\sqrt{3}$ см^2. **24.7.** $ab\sin\alpha$. **24.8.** $64\sqrt{3}$ см^2. **24.9.** $140\sqrt{2}$ см^2. **24.10.** 37,5 см^2. **24.11.** $\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$. **24.13.** 72 см^2. **24.14.** 360 см^2. **25.5.** $\frac{200}{3}$ см^2. **25.6.** $11\sqrt{3}$ см^2. **25.7.** 170 см^2. **25.8.** $b^2\sin\alpha\ \cos\alpha$. **25.9.** $h^2 \operatorname{tg}\frac{\beta}{2}$. **25.10.** $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$. **25.11.** $\frac{c^2}{4}$. **25.12.** $\frac{120}{13}$ см. **25.13.** 96 см^2. **25.15.** 336 см^2. **25.16.** 1080 см^2. **25.26.** 120 см^2. **25.27.** 20 см, $6\sqrt{10}$ см, $2\sqrt{10}$ см. **25.28.** 1176 см^2. **25.29.** 9,6 см^2. **25.30.** $\frac{4000}{3}$ см^2. **25.31.** $\frac{4000}{3}$ см^2. **25.32.** 2 : 1. **25.33.** *Указание.* Если K — точка касания окружности с гипотенузой AB, то $AK = p - BC$, $BK = p - AC$, где p — полупериметр треугольника ABC. **25.34.** 25 см^2. **25.35.** 1 см^2, 9 см^2. **25.38.** $\frac{a\sqrt{3}(a-2b)}{12}$. **25.39.** r, $\frac{4}{3}r$, $\frac{5}{3}r$. **25.44.** 19 см^2. **25.45.** Нет. *Указание.* Пусть r и r_1 — радиусы окружностей, вписанных в треугольники ABC и BCM соответственно, и $r = 2r_1$. Покажите, что из равенства $S_{BCM} = \frac{1}{2}S_{ABC}$ следует равенство периметров треугольников ABC и BCM. **25.46.** *Указание.* Проведите прямые AM, BM и CM и воспользуйтесь ключевой задачей 2 § 25. **25.47.** *Указание.* Воспользовавшись ключевой задачей 3 § 25, докажите, что $S_{ABO} = S_{DCO}$. **25.49.** $\frac{15}{4}$ см^2. *Указание.* Для четырёхугольника $MNKF$ воспользуйтесь ключевой задачей 3 § 25. **25.50.** *Указание.* Докажите, что площадь треугольника BCK равна половине площади каждого из параллелограммов. **25.51.** *Указание.* Проведите медиану BM. Через точку M проведите прямую, параллельную прямой BD. Пусть N — точка пересечения проведённой прямой с одной из сторон BA или BC. Тогда DN — искомая прямая. **25.52.** *Указание*. Проведите прямую l параллельно прямой A_2A_n (см. рисунок). $B_1A_2...A_{n-1}$ — искомый $(n-1)$-угольник. **25.53.** Все точки квадрата, не принадлежащие его сторонам, и прямые, содержащие диагонали квадрата, за исключением точек A, B, C и D. **25.54.** *Указание*. Проведите диагонали четырёхугольника $ABCD$. **25.55.** *Указание*. Имеем $S_{MBN} = S_{MBO} + S_{OBN}$, где точка O — центр вписанной окружности. Проведём радиусы в точки касания и получим $S_{MBN} = \frac{1}{2}(BM + BN) \cdot r \geqslant r\sqrt{BM \cdot BN} \geqslant r\sqrt{2S_{MBN}}$. **25.56.** 3 см. *Указание*. Воспользовавшись ключевыми задачами 1 и 3 § 25, докажите, что четырёхугольник $ABCD$ — параллелограмм. **25.57.** 7 см. *Указание*. Пусть стороны треугольника равны a, b и c. Тогда $a + 3b + 15c = 2S$, $4a + 5b + 11c = 2S$. Отсюда $7(a + b + c) = 2S = (a + b + c)r$. **25.58.** *Указание*. Воспользуйтесь ключевой задачей 15.46. **26.6.** $108\sqrt{3}$ см^2. **26.7.** 195 см^2. **26.8.** 840 см^2. **26.9.** 132 см^2. **26.10.** $600\sqrt{3}$ см^2. **26.11.** 1640 см^2. **26.12.** $(32 + 32\sqrt{2})$ см^2. **26.13.** 294 см^2. **26.15.** 512 см^2. **26.16.** 192 см^2. **26.17.** 2 : 3. **26.18.** 59 : 53. **26.20.** 156 см^2. **26.22.** 588 см^2. **26.23.** 2187 см^2. **26.24.** 936 см^2. **26.25.** $\frac{3a^2\sqrt{3}}{4}$. *Указание*. Докажите, что угол при большем основании трапеции равен 60°. **26.26.** 336 см^2. *Указание*. В данной трапеции $ABCD$ ($BC \parallel AD$) через вершину C проведите прямую CF, параллельную диагонали BD (точка F принадлежит прямой AD), и рассмотрите треугольник ACF. **26.27.** 150 см^2. **26.28.** $h^2\sqrt{3}$. **26.29.** $\frac{S}{2}$. *Указание*. Проведите среднюю линию MN трапеции. Докажите, что высоты треугольников MCN и MND, проведённые из вершин C и D, равны половине высоты трапеции. **26.32.** *Указание*. Пусть точка K — середина боковой стороны AB трапеции $ABCD$ (см. рисунок). Докажите, что трапеция $ABCD$ и па-

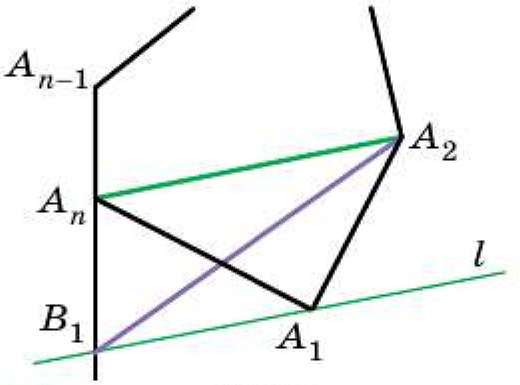


Рисунок к задаче 25.52

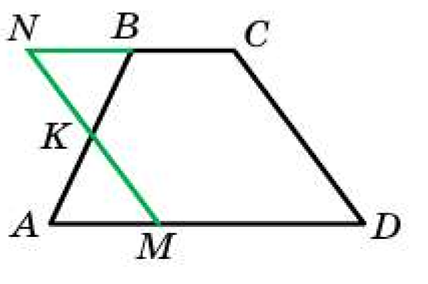
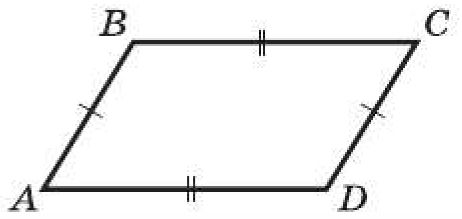
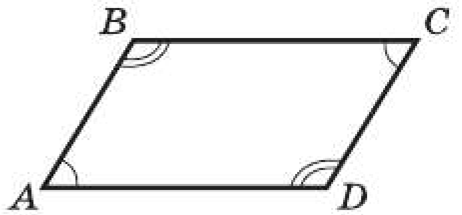
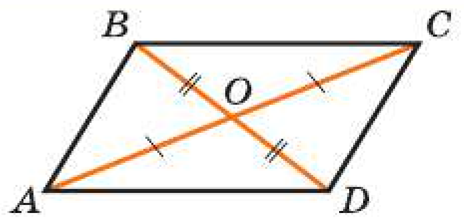


Рисунок к задаче 26.32

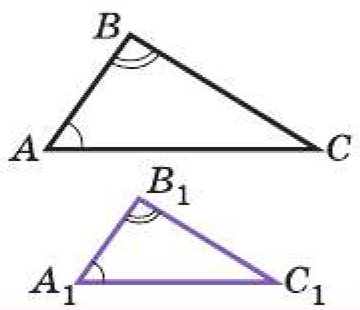
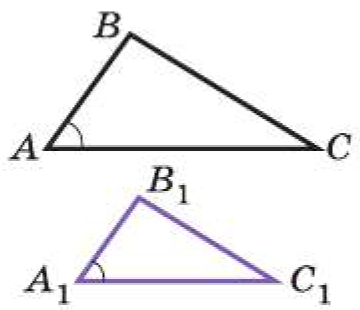
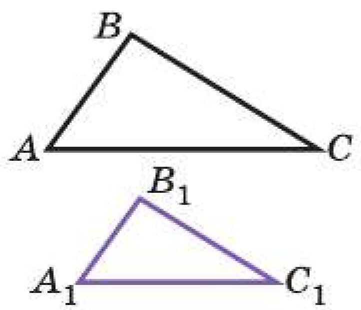
раллелограмм $MNCD$ равносоставленные. **26.33.** 1 см^2. **26.34.** $\frac{1}{4}$ см^2. **26.35.** 1 см^2. *Указание*. Разрежьте пятиугольник $ABCDE$ по диагоналям AC и CE и составьте из треугольников ABC и CDE треугольник, равный треугольнику ACE. **26.36.** *Указание*. Докажите, что площади трапеций, на которые прямая делит квадрат, относятся как их средние линии.

Оглавление

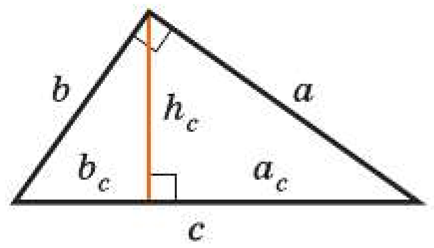
Свойства параллелограмма

	Если $ABCD$ — параллелограмм, то $AB = CD$ и $BC = AD$
	Если $ABCD$ — параллелограмм, то $\angle A = \angle C$ и $\angle B = \angle D$
	Если $ABCD$ — параллелограмм, то $AO = OC$ и $BO = OD$

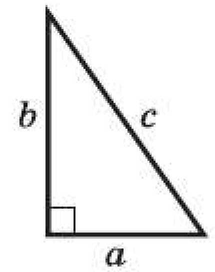
Признаки подобия треугольников

	**Первый признак подобия** **(по двум углам)** Если $\angle A = \angle A_1$ и $\angle B = \angle B_1$, то $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$
	**Второй признак подобия** **(по двум сторонам и углу между ними)** Если $\dfrac{AB}{A_1B_1} = \dfrac{AC}{A_1C_1}$ и $\angle A = \angle A_1$, то $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$
	**Третий признак подобия** **(по трём сторонам)** Если $\dfrac{AB}{A_1B_1} = \dfrac{BC}{B_1C_1} = \dfrac{CA}{C_1A_1}$, то $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$

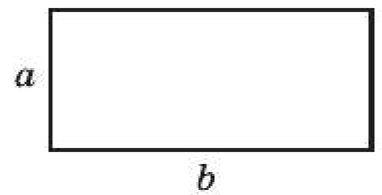
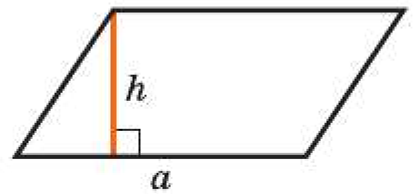
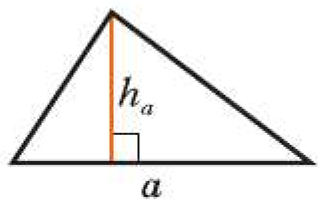
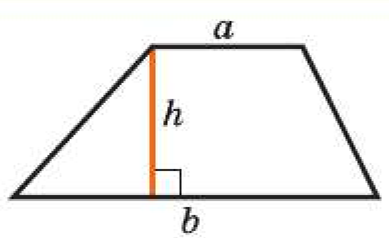
Метрические соотношения в прямоугольном треугольнике

	$a^2 = ca_c,\ b^2 = cb_c,$ $h_c{}^2 = a_cb_c$

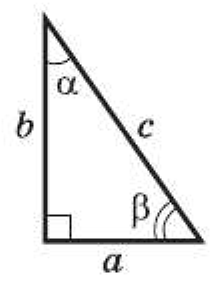
Теорема Пифагора

	$c^2 = a^2 + b^2$

Площади многоугольников

	**Формула площади прямоугольника:** $S = ab$
	**Формула площади параллелограмма:** $S = ah$
	**Формула площади треугольника:** $S = \dfrac{1}{2}\,ah_a$
	**Формула площади трапеции:** $S = \dfrac{a+b}{2} \cdot h$

Тригонометрические функции острого угла прямоугольного треугольника



$\sin\alpha = \frac{a}{c}$; $\sin\beta = \frac{b}{c}$.

$\cos\alpha = \frac{b}{c}$; $\cos\beta = \frac{a}{c}$.

$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}$; $\operatorname{tg}\beta = \frac{b}{a}$.

$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{b}{a}$; $\operatorname{ctg}\beta = \frac{a}{b}$.

Значение синуса, косинуса, тангенса и котангенса для углов 30°, 45° и 60°

	$\alpha = 30^\circ$	$\alpha = 45^\circ$	$\alpha = 60^\circ$
$\sin\alpha$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\operatorname{tg}\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
$\operatorname{ctg}\alpha$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

Латинский алфавит

Печатные буквы		Названия букв
A	a	а
B	b	бэ
C	c	цэ
D	d	дэ
E	e	е
F	f	эф
G	g	жэ
H	h	аш
I	i	и
J	j	жи
K	k	ка
L	l	эль
M	m	эм
N	n	эн
O	o	о
P	p	пэ
Q	q	ку
R	r	эр
S	s	эс
T	t	тэ
U	u	у
V	v	вэ
W	w	дубль-вэ
X	x	икс
Y	y	игрек
Z	z	зед

Греческий алфавит

Печатные буквы		Названия букв
Α	α	альфа
Β	β	бета
Γ	γ	гамма
Δ	δ	дельта
Ε	ε	эпсилон
Ζ	ζ	дзета
Η	η	эта
Θ	θ, ϑ	тета
Ι	ι	йота
Κ	κ	каппа
Λ	λ	лямбда
Μ	μ	мю
Ν	ν	ню
Ξ	ξ	кси
Ο	ο	омикрон
Π	π	пи
Ρ	ρ	ро
Σ	σ, ς	сигма
Τ	τ	тау
Υ	υ	ипсилон
Φ	φ, ϕ	фи
Χ	χ	хи
Ψ	ψ	пси
Ω	ω	омега