

## Часть 21. Декартовы координаты на плоскости

Если точка  $M(x_0; y_0)$  — середина отрезка с концами в точках  $A(x_1; y_1)$  и  $B(x_2; y_2)$ ,

$$\text{то } x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2} \text{ и } y_0 = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

Квадрат расстояния между точками  $A(x_1, y_1)$  и  $B(x_2, y_2)$  равен  $(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2$ .

Окружность радиуса  $R$  с центром в точке  $A(a; b)$  имеет уравнение вида  $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$ .

Любая прямая в декартовых координатах  $xOy$  имеет уравнение вида  $ax + by + c = 0$ , где  $a, b, c$  — некоторые числа, причём хотя бы одно из чисел  $a, b$  отлично от нуля.

Любая прямая, не параллельная оси ординат, имеет уравнение вида  $y = kx + l$ . Число  $k$  называется угловым коэффициентом прямой. Угловым коэффициентом прямой с точностью до знака равен тангенсу острого угла, который образует прямая с осью  $Ox$ .

21.1. Даны точки  $A(-1; 5)$  и  $B(3; -7)$ . Найдите расстояние от начала координат до середины отрезка  $AB$ .

21.2. Даны точки  $A(3; 5)$ ,  $B(-6; -2)$  и  $C(0; -6)$ . Докажите, что треугольник  $ABC$  равносторонний.

21.3. Даны точки  $A(2; 4)$ ,  $B(6; -4)$  и  $C(-8; -1)$ . Докажите, что треугольник  $ABC$  прямоугольный.

21.4. Докажите, что точки  $A(-1; -2)$ ,  $B(2; -1)$  и  $C(8; 1)$  лежат на одной прямой.

21.5. Даны точки  $A(-2; 1)$ ,  $B(2; 5)$  и  $C(4; -1)$ . Точка  $D$  лежит на продолжении медианы  $AM$  за точку  $M$ , причём четырёхугольник  $ABDC$  — параллелограмм. Найдите координаты точки  $D$ .

21.6. Дана точка  $M(-1; 3)$ . Найдите координаты точки, симметричной точке  $M$  относительно: а) оси  $Ox$ ; б) оси  $Oy$ ; в) начала координат; г) точки  $K(3; 1)$ ; д) биссектрисы I и III координатных углов; е) биссектрисы II и IV координатных углов.

21.7. Даны точки  $A(-2; 0)$ ,  $B(1; 6)$ ,  $C(5; 4)$  и  $D(2; -2)$ . Докажите, что четырёхугольник  $ABCD$  — прямоугольник.

21.8. Даны точки  $A(0; -2)$ ,  $B(-2; 1)$ ,  $C(0; 0)$  и  $D(2; -9)$ . Укажите те из них, которые лежат на прямой  $2x - 3y + 7 = 0$ .

21.9. Составьте уравнение прямой, проходящей через точку  $M(-3; 1)$  параллельно: а) оси  $Ox$ ; б) оси  $Oy$ .

21.10. Найдите расстояние между точкой  $A(1; 7)$  и точкой пересечения прямых  $x - y - 1 = 0$  и  $x + 3y - 12 = 0$ .

21.11. Составьте уравнение прямой, проходящей через точку  $M(-3; 2)$  параллельно прямой  $2x - 3y + 4 = 0$ .

21.12. Составьте уравнение прямой, проходящей через точку пересечения прямых  $3x + 2y - 5 = 0$  и  $x - 3y + 2 = 0$  параллельно оси ординат.

21.13. Найдите координаты вершин треугольника, стороны которого лежат на прямых  $2x + y - 6 = 0$ ,  $x - y + 4 = 0$  и  $y + 1 = 0$ .

21.14. Даны точки  $A(-2; 2)$ ,  $B(-2; -2)$  и  $C(6; 6)$ . Составьте уравнения прямых, на которых лежат стороны треугольника  $ABC$ .

21.15. Даны точки  $A(4; 1)$ ,  $B(-8; 0)$  и  $C(0; -6)$ . Составьте уравнение прямой, на которой лежит медиана  $AM$  треугольника  $ABC$ .

21.16. Окружность с центром в точке  $M(3; 1)$  проходит через начало координат. Составьте уравнение окружности.

21.17. Найдите радиус и координаты центра окружности, заданной уравнением: а)  $(x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 16$ ; б)  $x^2 + y^2 - 2(x - 3y) - 15 = 0$ ; в)  $x^2 + y^2 = x + y + \frac{1}{2}$ .

21.18. Даны точки  $A(0; 0)$ ,  $B(4; 0)$  и  $C(0; 6)$ . Составьте уравнение окружности, описанной около треугольника  $ABC$ .

21.19. Найдите длину хорды, которую на прямой  $y = 3x$  отсекает окружность  $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 25$ .

21.20. Докажите, что прямая  $3x - 4y + 25 = 0$  касается окружности  $x^2 + y^2 = 25$  и найдите координаты точки касания.

21.21. Составьте уравнение окружности, касающейся осей координат и проходящей через точку  $A(2; 1)$ .

21.22. Найдите координаты точек пересечения окружностей  $(x - 2)^2 + (y - 10)^2 = 50$  и  $x^2 + y^2 + 2(x - y) - 18 = 0$ .

21.23. Даны точки  $A(0; 0)$ ,  $B(-2; 1)$ ,  $C(3; 3)$ ,  $D(2; -1)$  и окружность  $(x - 1)^2 + (y + 3)^2 = 25$ . Выясните, где расположены эти точки: на окружности, внутри или вне окружности.

21.24. Даны точки  $A(-6; 1)$  и  $B(4; 6)$ . Найдите координаты точки  $C$ , делящей отрезок  $AB$  в отношении 2:3, считая от точки  $A$ .

21.25. Даны точки  $A(5; 5)$ ,  $B(8; -3)$  и  $C(-4; 1)$ . Найдите координаты точки пересечения медиан треугольника  $ABC$ .

21.26. Даны точки  $A(-6; -1)$ ,  $B(1; 2)$  и  $C(-3; -2)$ . Найдите координаты вершины  $M$  параллелограмма  $ABMC$ .

21.27. Даны точки  $A(-1; 3)$ ,  $B(1; -2)$ ,  $C(6; 0)$  и  $D(4; 5)$ . Докажите, что четырёхугольник  $ABCD$  — квадрат.

21.28°. Известно, что прямая с угловым коэффициентом  $k$  проходит через точку  $M(x_0; y_0)$ . Докажите, что её уравнение имеет вид  $y - y_0 = k(x - x_0)$ .

21.29°. Известно, что прямая проходит через точки  $M(x_1; y_1)$  и  $N(x_2; y_2)$ , причём  $x_1 \neq x_2$  и  $y_1 \neq y_2$ . Докажите, что её уравнение имеет вид  $\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$ .

21.30. Составьте уравнение окружности, проходящей через точки  $A(-2; 1)$ ,  $B(9; 3)$  и  $C(1; 7)$ .

21.31. Составьте уравнение прямой, проходящей через точку  $A(0; 7)$  и касающейся окружности  $(x - 15)^2 + (y - 2)^2 = 25$ .

21.32. Докажите, что прямые, заданные уравнениями  $y = k_1x + l_1$  и  $y = k_2x + l_2$ , перпендикулярны тогда и только тогда, когда  $k_1k_2 = -1$ .

21.33. Даны точки  $A(-2; 3)$ ,  $B(2; 6)$ ,  $C(6; -1)$  и  $D(-3; -4)$ . Докажите, что диагонали четырёхугольника  $ABCD$  перпендикулярны.

- 21.34.** Составьте уравнение прямой, проходящей через точку  $M(-1; 4)$  перпендикулярно прямой  $x - 2y + 4 = 0$ .
- 21.35.** Даны точки  $A(6; 1)$ ,  $B(-5; -4)$ ,  $C(-2; 5)$ . Составьте уравнение прямой, на которой лежит высота треугольника  $ABC$ , проведённая из вершины  $A$ .
- 21.36.** Даны точки  $A(5; -1)$ ,  $B(4; -8)$ ,  $C(-4; -4)$ . Найдите координаты точки пересечения высот треугольника  $ABC$ .
- 21.37.** С помощью метода координат докажите, что суммы квадратов расстояний от произвольной точки плоскости до противоположных вершин прямоугольника равны между собой.
- 21.38.** С помощью метода координат найдите геометрическое место точек плоскости, разность квадратов расстояний от которых до двух данных точек постоянна.
- 21.39.** Даны точки  $A$  и  $B$ . Найдите геометрическое место точек  $M$ , для которых  $AM = 2BM$ .
- 21.40.** Даны точки  $A$ ,  $B$  и положительное число  $d$ . Найдите геометрическое место точек  $M$ , для которых  $AM^2 + BM^2 = d$ .
- 21.41.** Докажите, что расстояние от точки  $M(x_0; y_0)$  до прямой, заданной уравнением  $ax + by + c = 0$ , равно  $\frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ .
- 21.42.** Найдите расстояние между параллельными прямыми  $y = -3x + 5$  и  $y = -3x - 4$ .
- 21.43.** Составьте уравнение окружности с центром в точке  $M(3; 2)$ , касающейся прямой  $y = 2x + 6$ .
- 21.44.** Точка  $M$  лежит на прямой  $3x - 4y + 34 = 0$ , а точка  $N$  — на окружности  $x^2 + y^2 - 8x + 2y - 8 = 0$ . Найдите наименьшее расстояние между точками  $M$  и  $N$ .
- 21.45.** Даны точки  $A(x_1; y_1)$ ,  $B(x_2; y_2)$  и неотрицательное число  $\lambda$ . Найдите координаты точки  $M$  луча  $AB$ , для которой  $AM : AB = \lambda$ .

#### *Дополнительные задачи*

- 21.46.** Даны точки  $A(x_1; y_1)$ ,  $B(x_2; y_2)$  и прямая  $ax + by + c = 0$ . Известно, что  $ax_1 + by_1 + c > 0$ , а  $ax_2 + by_2 + c < 0$ . Докажите, что точки  $A$  и  $B$  расположены по разные стороны от этой прямой.
- 21.47.** Найдите наименьшее значение выражения  $|a + b| + \sqrt{(a - 1)^2 + (b - 3)^2}$ .
- 21.48.** Две окружности касаются внешним образом в точке  $A$ . Прямая, проходящая через точку  $A$  вторично пересекает окружности в точках  $B$  и  $C$ . Найдите геометрическое место середин отрезков  $BC$ .
- 21.49.** На координатной плоскости нарисовали график функции  $y = x^2$ , а затем стёрли оси координат. Восстановите их с помощью циркуля и линейки.
- 21.50.** Назовём точку плоскости рациональной, если её обе координаты — рациональные числа. Докажите, что если на окружности  $x^2 + y^2 = R$  ( $R$  — целое) есть хотя бы одна рациональная точка, то на этой окружности бесконечно много рациональных точек.