Задача №255

Наверное, каждая содержательная геометрическая задача может быть источником целого ряда новых. Для этого с ней надо некоторое время «повозиться», посмотреть с разных сторон, попробовать перефразировать, обобщить.
В результате удивительным образом может возникнуть новая, совершенно не похожая на «родителя» задача. Например, возьмём ту же задачу №255...

И. Ф. Шарыгин. Геометрия. Задачник 9–11

Данный листок создан по мотивам одноимённого листка 179-й школы, из которого заимствованы и некоторые задачи.

Задача №255. Пусть M и N — точки касания вписанной окружности со сторонами BC и BA треугольника ABC, K — точка пересечения биссектрисы угла A с прямой MN. Доказать, что $\angle AKC = 90°$.

Задача 1. На биссектрисе угла A треугольника ABC выбрана точка D, такая, что $AD \perp BD$. Докажите, что D лежит на средней линии треугольника ABC, параллельной стороне AC.

Задача 2. (*ММО, 1994, 8.3*) В треугольнике ABC провели биссектрисы углов A и C. Точки P и Q — основания перпендикуляров, опущенных из вершины B на эти биссектрисы. Докажите, что отрезок PQ параллелен стороне AC.

Задача 3. (*ММО, 1999, 9.5*) Вписанная окружность треугольника ABC ($AB > BC$) касается сторон AB и AC в точках P и Q соответственно, RS — средняя линия, параллельная AB, T — точка пересечения прямых PQ и RS. Докажите, что T лежит на биссектрисе угла B треугольника.

Задача 4. (*Московская устная олимпиада по геометрии, 2009, 8–9*) Дан треугольник ABC. Из вершин B и C опущены перпендикуляры BM и CN на биссектрисы углов C и B соответственно. Докажите, что прямая MN пересекает стороны AC и AB в точках их касания со вписанной окружностью.

Задача 5. (*Всеросс., 2013, регион, 9.2*) Окружность, вписанная в прямоугольный треугольник ABC с гипотенузой AB, касается сторон BC, CA, AB в точках A_1, B_1, C_1 соответственно. Пусть B_1H — высота треугольника $A_1B_1C_1$. Докажите, что точка H лежит на биссектрисе угла CAB.