

Пусть a, b, c — стороны треугольника; α, β, γ — противолежащие им углы; R — радиус описанной окружности; r — радиус вписанной окружности; p — полупериметр.

Формулы площади треугольника: $S = \frac{1}{2}ab \sin \gamma$, $S = pr$, $S = \frac{abc}{4R}$, $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ (формула Герона).

- 17.1. Среди всех треугольников с заданными сторонами AB и AC найдите тот, у которого наибольшая площадь.
- 17.2. Катеты прямоугольного треугольника равны 15 и 8. Найдите высоту, опущенную на гипотенузу.
- 17.3. Найдите площадь треугольника ABC , если известно, что $AB = a$, $\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$.
- 17.4. В параллелограмме $ABCD$ угол BAD равен 60° , а сторона AB равна 3. Биссектриса угла A пересекает сторону BC в точке E . Найдите площадь треугольника ABE .
- 17.5. Докажите, что если диагонали выпуклого четырёхугольника равны, то его площадь равна произведению длин отрезков, соединяющих середины противоположных сторон.
- 17.6. Найдите площадь треугольника, если две его стороны равны 1 и $\sqrt{15}$, а медиана, проведённая к третьей, равна 2.
- 17.7. Стороны треугольника равны a, b, b . Найдите высоту, проведённую к стороне b .
- 17.8. В треугольник со сторонами a и b и углом α между ними вписан полукруг с диаметром на третьей стороне. Найдите его радиус.
- 17.9. а) В треугольнике ABC известно, что $AB = 8$, $AC = 6$, $\angle BAC = 60^\circ$. Найдите биссектрису AM . б) Стороны треугольника равны a и b , а угол между ними равен α . Найдите биссектрису, проведённую из вершины этого угла.
- 17.10. Докажите, что площадь выпуклого четырёхугольника равна половине произведения диагоналей на синус угла между ними.
- 17.11. Найдите площадь трапеции: а) с основаниями 18 и 13 и боковыми сторонами 3 и 4; б) с основаниями 16 и 44 и боковыми сторонами 17 и 25.
- 17.12. В треугольнике ABC известно, что $\angle BAC = \alpha$, $\angle BCA = \gamma$, $AB = c$. Найдите площадь треугольника ABC .
- 17.13. Найдите площадь трапеции: а) с основаниями 11 и 4 и диагоналями 9 и 12; б) с основаниями 6 и 3 и диагоналями 7 и 8.
- 17.14. В равнобедренной трапеции основания равны 40 и 24, а её диагонали взаимно перпендикулярны. Найдите площадь трапеции.
- 17.15. Площадь треугольника ABC равна S , $\angle BAC = \alpha$, $AC = b$. Найдите BC .
- 17.16. Две стороны треугольника равны $2\sqrt{2}$ и 3, площадь треугольника равна 3. Найдите третью сторону.
- 17.17. Медианы AN и BM треугольника ABC равны 6 и 9 соответственно и пересекаются в точке K , причём угол AKB равен 30° . Найдите площадь треугольника ABC .
- 17.18. Две стороны треугольника равны 10 и 12, а медиана, проведённая к третьей, равна 5. Найдите площадь треугольника.
- 17.19. Расстояния от точки M , лежащей внутри треугольника ABC , до его сторон AC и BC соответственно равны 2 и 4. Найдите расстояние от точки M до прямой AB , если $AB = 10$, $BC = 17$, $AC = 21$.
- 17.20. В треугольник вписан круг радиуса 4. Одна из сторон треугольника разделена точкой касания на части, равные 6 и 8. Найдите две другие стороны треугольника.
- 17.21. Вершины треугольника соединены с центром вписанного круга. Проведёнными отрезками площадь этого треугольника разделилась на три части: 28, 60 и 80. Найдите стороны треугольника.
- 17.22. Основание равнобедренного треугольника равно a , а высота, опущенная на боковую сторону, равна h . Найдите площадь треугольника.
- 17.23. Найдите высоты треугольника, если его углы равны α, β и γ , а площадь равна S .
- 17.24. Найдите стороны треугольника, если его углы равны α, β и γ , а площадь равна S .
- 17.25. Точки B_1 и C_1 — основания высот треугольника ABC , площадь которого равна S , а угол BAC равен α . Найдите площадь треугольника AB_1C_1 .
- 17.26. Найдите площадь треугольника, если две его стороны равны 35 и 14, а биссектриса угла между ними равна 12.
- 17.27. В остроугольном треугольнике ABC из вершин A и C опущены высоты AP и CQ на стороны BC и AB . Известно, что площадь треугольника ABC равна 18, площадь треугольника BPQ равна 2, а $PQ = 2\sqrt{2}$. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника ABC .
- 17.28. Дан треугольник ABC . Из вершины A проведена медиана AM , а из вершины B — медиана BP . Известно, что угол APB равен углу BMA . Косинус угла ACB равен 0,8 и $BP = 1$. Найдите площадь треугольника ABC .
- 17.29. В трапеции $ABCD$ диагонали AC и BD перпендикулярны, $\angle BAC = \angle CDB$. Продолжения боковых сторон AB и DC пересекаются в точке K , образуя угол AKD , равный 30° . Найдите площадь треугольника AKD , если площадь трапеции равна P .
- 17.30. В параллелограмме $ABCD$ точка E делит пополам сторону CD , биссектриса угла ABC пересекает в точке O отрезок AE . Найдите площадь четырёхугольника $OBCE$, зная, что $AD = a$, $DE = b$, $\angle ABO = \alpha$.
- 17.31. Диагонали трапеции взаимно перпендикулярны. Одна из них равна 6. Отрезок, соединяющий середины оснований, равен 4,5. Найдите площадь трапеции.
- 17.32. Около окружности радиуса R описан параллелограмм. Площадь четырёхугольника с вершинами в точках касания окружности и параллелограмма равна S . Найдите стороны параллелограмма.

17.33. В треугольнике ABC известно, что $AB = 6$, $BC = 4$, $AC = 8$. Биссектриса угла C пересекает сторону AB в точке D . Через точки A , D и C проведена окружность, пересекающая сторону BC в точке E . Найдите площадь треугольника ADE .

17.34. В параллелограмме $ABCD$ острый угол BAD равен α . Пусть O_1, O_2, O_3, O_4 — центры окружностей, описанных соответственно около треугольников DAB, DAC, DBC, ABC . Найдите отношение площади четырёхугольника $O_1O_2O_3O_4$ к площади параллелограмма $ABCD$.

17.35. В четырёхугольнике $ABCD$ острый угол между диагоналями равен α . Через каждую вершину проведена прямая, перпендикулярная диагонали, не содержащей эту вершину. Найдите отношение площади четырёхугольника, ограниченного этими прямыми, к площади четырёхугольника $ABCD$.

17.36. Из точки P , расположенной внутри остроугольного треугольника ABC , опущены перпендикуляры на его стороны. Длины сторон и опущенных на них перпендикуляров соответственно равны a и k , b и m , c и n . Найдите отношение площади треугольника ABC к площади треугольника, вершинами которого служат основания перпендикуляров.

17.37. Периметр выпуклого четырёхугольника равен 4. Докажите, что его площадь не превосходит 1.

17.38. Стороны треугольника не превосходят 1. Докажите, что его площадь не превосходит $\frac{\sqrt{3}}{4}$.

17.39. Около треугольника ABC описана окружность. Медиана AD продолжена до пересечения с этой окружностью в точке E . Известно, что $AB + AD = DE$, $\angle BAD = 60^\circ$, $AE = 6$. Найдите площадь треугольника ABC .

17.40. *Задача Льюиле.* Пусть r — радиус вписанной окружности, r_a, r_b и r_c — радиусы внеписанных окружностей треугольника ABC , касающихся сторон $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$ соответственно; p — полупериметр треугольника ABC , S — его площадь. Докажите, что: а) $\frac{1}{r} = \frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c}$; б) $S = \sqrt{r r_a r_b r_c}$.

17.41. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AM и CN , O — центр описанной около ABC окружности. Известно, что $\angle ABC = \beta$, а площадь четырёхугольника $NOMB$ равна S . Найдите AC .

17.42. Две окружности пересекаются в точках A и K . Их центры расположены по разные стороны от прямой, содержащей отрезок AK . Точки B и C лежат на разных окружностях. Прямая, содержащая отрезок AB , касается одной окружности в точке A . Прямая, содержащая отрезок AC , касается другой окружности также в точке A . Длина отрезка BK равна 1, длина отрезка CK равна 4, а тангенс угла CAB равен $\frac{1}{\sqrt{15}}$. Найдите площадь треугольника ABC .

17.43. В остроугольном треугольнике ABC с углом C , равным 30° , высоты пересекаются в точке M . Найдите площадь треугольника AMB , если расстояния от центра окружности, описанной около треугольника ABC , до сторон BC и AC соответственно равны $\sqrt{2}$ и $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

17.44. На отрезке AB лежат точки C и D , причём точка C — между точками A и D . Точка M взята так, что прямые AM и MD перпендикулярны и прямые CM и MB тоже перпендикулярны. Найдите площадь треугольника AMB , если известно, что величина угла CMD равна α , а площадь треугольников AMD и CMB равны S_1 и S_2 соответственно.

17.45. *Формула Брахмагупты.* Докажите, что если стороны вписанного четырёхугольника равны a, b, c и d , то его площадь S может быть вычислена по формуле $S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$, где $p = \frac{1}{2}(a+b+c+d)$ — полупериметр четырёхугольника.

17.46. Окружность, вписанная в треугольник, точкой касания делит одну из сторон на отрезки, равные 3 и 4, а противолежащий этой стороне угол равен 120° . Найдите площадь треугольника.

17.47. Площадь треугольника ABC равна $15\sqrt{3}$. Угол BAC равен 120° . Угол ABC больше угла ACB . Расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC , равно 2. Найдите медиану треугольника ABC , проведённую из вершины B .

17.48. В окружность радиуса 7 вписан четырёхугольник $ABCD$. Известно, что $AB = BC$, площадь треугольника BCD в два раза меньше площади треугольника ABD , $\angle ADC = 120^\circ$. Найдите все стороны четырёхугольника $ABCD$.

17.49. Вершины ромба расположены на сторонах параллелограмма, а стороны ромба параллельны диагоналям параллелограмма. Найдите отношение площадей ромба и параллелограмма, если отношение диагоналей параллелограмма равно k .

17.50. а) На прямой, проходящей через центр O окружности радиуса 12, взяты точки A и B , лежащие по разные стороны от точки O , причём $OA = 15$, $OB = 13$. Из точек A и B проведены касательные к окружности, точки касания которых лежат по одну сторону от прямой AB . Найдите площадь треугольника ABC , если C — точка пересечения этих касательных.

б) На прямой, проходящей через центр O окружности радиуса 12, взяты точки A и B так, что $OA = 15$, $AB = 5$ и A лежит между O и B . Из точек A и B проведены касательные к окружности, точки касания которых лежат по одну сторону от прямой OB . Найдите площадь треугольника ABC , где C — точка пересечения этих касательных.

17.51. Точки K, L, M, N и P расположены последовательно на окружности радиуса $2\sqrt{2}$. Найдите площадь треугольника KLM , если $LM \parallel KN$, $KM \parallel NP$, $MN \parallel LP$, а угол LOM равен 45° , где O — точка пересечения хорд LN и MP .

17.52. В треугольнике ABC со сторонами 13, 14 и 15 H, M и L — точки пересечения высот, медиан и биссектрис соответственно. Найдите площадь треугольника HML .

17.53. Окружность радиуса 3 проходит через вершину B , середины сторон AB и BC , а также касается стороны AC треугольника ABC . Угол BAC острый и $\sin \angle BAC = \frac{1}{3}$. Найдите площадь треугольника ABC .

17.54. Остроугольный равнобедренный треугольник и трапеция вписаны в окружность. Одно основание трапеции является диаметром окружности, а боковые стороны параллельны боковым сторонам треугольника. Докажите, что трапеция и треугольник равновелики.

17.55. На стороне AB треугольника ABC выбрана точка D так, что $CD = \sqrt{13}$ и $\sin \angle ACD : \sin \angle BCD = 4 : 3$. Через середину отрезка CD проведена прямая, пересекающая стороны AC и BC в точках M и N соответственно. Известно, что $\angle ACB = 120^\circ$, площадь треугольника MCN равна $3\sqrt{3}$, а расстояние от точки M до прямой AB в два раза больше расстояния от точки N до этой же прямой. Найдите площадь треугольника ABC .

17.56. Внутри правильного треугольника имеется точка, удалённая от его вершин на расстояния 5, 6 и 7. Найдите площадь этого правильного треугольника.

17.57. Стороны четырёхугольника равны a , b , c и d . Известно, что в этот четырёхугольник можно вписать окружность и около него можно описать окружность. Докажите, что его площадь равна \sqrt{abcd} .

17.58. Пусть a , b , c , d — последовательные стороны четырёхугольника. Докажите, что если S — его площадь, то $S \leq \frac{1}{2}(ac + bd)$, причём равенство имеет место только для вписанного четырёхугольника, диагонали которого взаимно перпендикулярны.

17.59. Каждая диагональ выпуклого пятиугольника $ABCDE$ отсекает от него треугольник единичной площади. Вычислите площадь пятиугольника $ABCDE$.

17.60. В треугольнике ABC на стороне AC взята точка D . Окружности, вписанные в треугольники ABD и BCD , касаются стороны AC в точках M и N соответственно. Известно, что $AM = 3$, $MD = 2$, $DN = 2$, $NC = 4$. Найдите стороны треугольника ABC .

17.61. Докажите, что точка пересечения диагоналей описанного вокруг окружности четырёхугольника совпадает с точкой пересечения диагоналей четырёхугольника, вершинами которого служат точки касания сторон первого четырёхугольника с окружностью.

17.62. Все биссектрисы треугольника меньше 1. Докажите, что его площадь меньше $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

17.63. В трапеции основания равны a и b , диагонали перпендикулярны, а угол между боковыми сторонами равен α . Найдите площадь трапеции.

17.64. Дан треугольник со сторонами $2\sqrt{13}$, $2\sqrt{5}$, 8. На его сторонах построены квадраты. Найдите площадь треугольника с вершинами в центрах этих квадратов, если квадраты построены: а) во внешнюю сторону; б) во внутреннюю сторону.

17.65. На отрезке AC взята точка B и на отрезках AB , BC и AC построены как на диаметрах полуокружности S_1 , S_2 и S_3 по одну сторону от AC . Пусть D — точка на S_3 , проекция которой на AC совпадает с точкой B . Общая касательная к S_1 и S_2 касается этих полуокружностей в точках E и F соответственно.

а) Докажите, что прямая EF параллельна касательной к S_3 в точке D .

б) Докажите, что $BFDE$ — прямоугольник.

в) Найдите радиус окружности, касающейся всех трёх полуокружностей, если известно, что её центр удалён от прямой AC на расстояние a .