Листок 6. Функция Эйлера и теорема Эйлера

8 класс "В"

11 ноября 2021 г.

Теорема Эйлера обобщает малую теорему Ферма (МТФ) на случай, когда модуль составной. Прежде чем ее сформулировать, определим функцию Эйлера.

Функция Эйлера $\varphi(n)$ *сопоставляет каждому целому положительному числу* n *количество остатков по модулю* n*, взаимно простых с* n*.*

1 Вычислите $\varphi(6)$, $\varphi(12)$, $\varphi(15)$, $\varphi(43)$.

2 Существует ли такое n, что $\varphi(n) = 3$?

3 Пусть n — нечетное число. Докажите, что среди чисел, меньших n и взаимно простых с n, четных и нечетных поровну.

4 Известно, что $\varphi(n) = k$. Чему может быть равно $\varphi(2n)$?

5 Пусть p и q — различные простые числа. Найдите:
a $\varphi(p)$; b $\varphi(p^k)$; c $\varphi(pq)$;
d $\varphi(p^a q^b)$, где a и b — натуральные числа.

6 Решите уравнения:
a $\varphi(x) = 1$; b $\varphi(x) = 8$; c $\varphi(7^x) = 294$; d $\varphi(3^x 5^y) = 360$.

7 Для взаимно простых a и b рассмотрим таблицу:

$$\begin{array}{ccccc}
1 & 2 & 3 & \dots & b \\
b+1 & b+2 & b+3 & \dots & 2b \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
(a-1)b+1 & (a-1)b+2 & (a-1)b+3 & \dots & ab.
\end{array}$$

a В каких столбцах этой таблицы находятся числа, взаимно простые с числом b? Сколько в каждом из этих столбцов чисел, взаимно простых с a?

b Докажите, что $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$ для взаимно простых a и b (это свойство называется *мультипликативностью* функции Эйлера).

8 Пусть дано разложение n на простые множители: $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_k^{a_k}$.

a Докажите, что

$$\varphi(n) = \left(p_1^{a_1} - p_1^{a_1-1}\right)\left(p_2^{a_2} - p_2^{a_2-1}\right)\dots\left(p_k^{a_k} - p_k^{a_k-1}\right).$$

b Выведите из этой формулы следующую:

$$\varphi(n) = n\prod_i \left(1 - \frac{1}{p_i}\right) = n\left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\left(1 - \frac{1}{p_2}\right)\dots\left(1 - \frac{1}{p_k}\right).$$

Теорема Эйлера. Если a и n взаимно просты, то $a^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$.

$\boxed{\mathbf{9}}$ Докажите, что если m и n взаимно просты, а x взаимно прост с каждым из них, то для $c = [\varphi(m), \varphi(n)]$ имеет место сравнение $x^c \equiv 1 \pmod{mn}$.

$\boxed{\mathbf{10}}$ Найдите: $\boxed{\text{a}}$ $43^9 \bmod 15$; $\boxed{\text{b}}$ $59^9 \bmod 72$; $\boxed{\text{c}}$ $2021^{16} \bmod 544$.

$\boxed{\mathbf{11}}$ Докажите, что для любого натурального a число a^5 оканчивается на ту же цифру, что и a.

$\boxed{\mathbf{12}}$ Какой остаток при делении на 15 может давать число $a^{12} - 2a^8 + 4a^4 + 1$, если a — произвольное целое число?

$\boxed{\mathbf{13}}$ $\boxed{\text{a}}$ Найдите все целые числа a, для которых $a^{10} + 1$ оканчивается цифрой ноль.

$\boxed{\text{b}}$ Докажите, что ни при каком целом a число $a^{100} + 1$ не оканчивается цифрой ноль.

$\boxed{\mathbf{14}}$ Докажите, что если a и b — взаимно простые натуральные числа, то $a^{\varphi(b)} + b^{\varphi(a)} \equiv 1 \pmod{ab}$.

$\boxed{\mathbf{15}}$ Пусть $a \geq 2$, $n \geq 1$ — целые числа. Докажите, что $\varphi(a^n - 1) \,\vdots\, n$.

$\boxed{\mathbf{16}}$ Докажите, что если n — нечетное натуральное число, то $2^{n!} - 1$ кратно n.

$\boxed{\mathbf{17}}$ Существует ли такое натуральное число k, что сто последних цифр десятичной записи числа 3^k совпадают со ста последними цифрами числа 7^k?

Определение. Если a и n взаимно просты, то наименьшее число k, для которого $a^k \equiv 1 \pmod{n}$ называется **порядком** числа a по модулю n.

Теорема Лагранжа. Если a и n взаимно просты, то порядок числа a является делителем числа $\varphi(n)$.

$\boxed{\mathbf{18}}$ Простые числа p, q таковы, что $(5^p + 1) \,\vdots\, q$ и $(3^{3q} - 1) \,\vdots\, p$. Доказать, что среди чисел p и q есть 2, 3 или 13.

$\boxed{\mathbf{19}}$ По кругу написаны числа, причем каждое равно сумме двух чисел, следующих за ним по часовой стрелке. Докажите, что все эти числа — нули.

$\boxed{\mathbf{20}}$ На стойке в ряд стоит 150 стаканов, некоторые с напитком, остальные пусты. Известно, что среди любых трёх подряд идущих стаканов хотя бы один пуст. Бармен наполнил напитком несколько пустых стаканов. Теперь среди любых четырех подряд идущих стаканов пустых не более одного. Докажите, что бармен наполнил по крайней мере 25 стаканов.