Листок 5. Делимость и малая теорема Ферма

8 класс "В"

21 октября 2021 г.

В арифметике по модулю мы научились выполнять три основные операции: $+, -, \times$, *и до сих пор молчаливо обходили вопрос существования операции деления.*
В обычной арифметике деление определялось как операция обратная умножению: если $5 \cdot 2 = 10$, *то* $10 : 2 = 5$.

Назовем **частным от деления числа** a **на** d **по модулю** m *такое число* b, *что* $a \equiv bd \pmod{m}$.

1 Найдите частное от деления a на d

a

	0	1	2	3	4
0					
1			3	2	
2			1		
3					
4					

mod 5

b

	0	1	2	3	4	5
0						
1		1				
2						
3						
4						
5						

mod 6

Из задачи 1 следует, что деление в арифметике по модулю осуществимо не всегда, но гораздо чаще, чем деление нацело в обычной арифметике: $1 : 3 \equiv 2 \pmod{5}$.

2 Если 1 делится на a по модулю m, то и любое число b делится на a по модулю m.

Число a *называется* **обратимым в арифметике по модулю** m, *если существует такое число* a^{-1}, *что* $aa^{-1} \equiv 1 \pmod{m}$. *Число* a^{-1} *называется* **обратным к числу** a **по модулю** m.

3 Найдите обратные числа по модулю 7 к числам $1, 2, 3, 4, 5, 6$.

Число $a \neq 0$ *называется* **делителем нуля в арифметике по модулю** m, *если существует отличное от нуля число* b *такое, что* $ab \equiv 0 \pmod{m}$.

4 Найдите делители нуля в арифметике по модулю 8.

5 Докажите, что число не может быть одновременно и обратимым и делителем нуля.

6 Докажите, что, если число обратимо, то обратное к нему единственно.

7 Докажите, что если m — составное число, то найдется число a, являющееся делителем нуля по модулю m.

8 Докажите, что если a — не делитель нуля, то [a] $a^2, a^3, a^4, \ldots$ — тоже не являются делителями нуля; [b] среди чисел $a^2, a^3, a^4, \ldots$ должна найтись единица.

9 Докажите, что если m — простое число, все числа, отличные от нуля, обратимы.

10 Докажите, что если m — составное число, все числа, взаимно простые с m, обратимы.

Малая теорема Ферма: если p — простое и a взаимно просто с p, то $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$.

11 Найдите остаток от деления
[a] 2^{100} на 101; [b] 3^{102} на 101; [c] 8^{900} на 29;
[d] 3^{2015} на 43; [e] 8^{1543} на 48.

12 Докажите, что если p простое и $p > 2$, то $7^p - 5^p - 2$ делится на $6p$.

13 Докажите, что если p и q — различные простые числа, то $p^q + q^p \equiv p + q \pmod{pq}$.

14 Пусть p — простое число, а k — наименьшее натуральное число, такое что $a^k \equiv 1 \pmod{p}$. Докажите, что k является делителем числа $p-1$.

15 Докажите, что если целое число a не кратно 17, то $a^8 - 1$ или $a^8 + 1$ кратно 17.

16 Найдите все такие простые числа p, что $5^{p^2} + 1$ кратно p.

17 Докажите, что если p — простое число, то сумма $1^{p-1} + 2^{p-1} + \ldots + (p-1)^{p-1}$ при делении на p дает остаток $p-1$.

18 Пусть p — простое число, отличное от 2, 3 и 5. Докажите, что число, записанное $p-1$ единицей, кратно p. (Например, 111111 кратно 7.)

19 На клетчатой бумаге нарисован равнобедренный прямоугольный треугольник с катетами по 7 клеточек (катеты идут по границам сетки). Разрежьте его (по сторонам и диагоналям клеток) на шесть различных равнобедренных прямоугольных треугольников.

20 Ненулевые числа x, y, z таковы, что $x+y+z = 1$ и $1/x+1/y+1/z = 0$. Вычислите $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$.