

Листок 4. Планарные графы

25 сентября 2021

9 "В" класс

1 Трем мудрецам — Слепому, Глухому и Дальтонику (не различает красный и зеленый) надевают три колпака — красный, желтый и зеленый. Мудрецы должны в произвольном порядке назвать цвета своих колпаков. Могут ли они договориться так, чтобы все верно назвали цвет своих колпаков?

*Граф называется **плоским** (или **планарным**), если его можно расположить на плоскости так, чтобы его ребра пересекались только в вершинах. Области, на которые плоский граф разбивает плоскость называются его **гранями**.*

2 Вдоль границ клеток шахматной доски положили спички. Какое наименьшее число спичек надо убрать, чтобы ладья могла пройти с любого поля на любое, не переходя через спички?

3 Докажите **теорему Эйлера**: в связном плоском графе, степени всех вершин которого не меньше 3, верна формула: $F - E + V = 2$, где V — число вершин графа, E — число ребер, F — число граней. (Указание: используйте предыдущую задачу)

4 В стране 7 озер, соединенных между собой 11 каналами, причем от любого озера можно доплыть до любого другого. Сколько в стране островов, образованных озерами и каналами?

5 На окружности поставили n точек и соединили каждую две из них хордой. На сколько частей эти хорды разрезали круг, если никакие три из них не пересекаются в одной точке?

*Многогранник называется **правильным**, если все его грани являются правильными n -угольниками и из каждой вершины исходит одинаковое число ребер.*

6 Докажите, что существует (с точностью до подобия) ровно 5 правильных многогранников: тетраэдр, куб, октаэдр, икосаэдр и додекаэдр.

7 Докажите, что в связном плоском графе, в котором грань ограничена по крайней мере тремя ребрами, содержащим V вершин и E ребер, при $V \geq 3$ выполняется неравенство $E \leq 3V - 6$.

8 Докажите, что в любом плоском графе существует вершина, степень которой не превосходит пяти.

9 Можно ли соединить непересекающимися линиями любые 2 из 5 точек?

10 Можно ли соединить непересекающимися дорожками 3 домика с каждым из 3 колодцев?

Примечание. *Можно доказать теорему Понтрягина–Куратовского: граф является плоским тогда и только тогда, когда он не содержит графов, возникающих в двух последних задачах.*

11 Может ли существовать такая пятерка государств, в которой каждая пара государств соседствует друг с другом? (Соседними считаются государства, имеющие общую границу ненулевой длины.)

Рассмотрим плоский граф Γ . Построим граф Γ^ по следующему правилу. Внутри каждой грани исходного графа выделим по одной вершине нового графа. Если две грани графа Γ имеют общее ребро, то соответствующие им новые вершины соединим ребром нового графа. Ясно, что ребра можно провести так, чтобы они не пересекались. Поэтому граф Γ^* плоский. Построенный граф называется **двойственным** к графу Γ .*

12 Докажите, что у любого выпуклого многогранника найдутся две грани с одинаковым числом сторон.

13 Докажите, что не существует выпуклого многогранника, у которого каждая грань имеет не меньше шести сторон.

14 Можно ли разрезать треугольник на пять выпуклых многоугольников с попарно различным числом сторон?

Теорема. Грани плоского графа можно раскрасить пятью красками, так что любые две грани имеющие общее ребро будут раскрашены разными красками.

Примечание. *На самом деле для раскраски произвольной географической карты достаточно четырех красок. Это утверждение было “доказано” в 1976 году американскими математиками К. Appelем и В. Хакеном с помощью компьютера. Однако скептики не считают это “доказательство” удовлетворительным.*

15 Точка C лежит на отрезке AB . Окружности α , β и γ построены на отрезках BC , AC и AB соответственно как на диаметрах. Хорда UV окружности γ проходит через точку C и пересекает окружности α и β в точках X и Y соответственно. Докажите что $UX = VY$.