

Лист 23. Варьирование (метод Штурма)

28 апреля 2022

9 “В” класс

1 Расставьте в клетки таблицы 4×4 числа так, что бы для каждого числа сумма чисел, стоящих в соседних с ним (по стороне) клетках, равнялась единице. Чему может быть равна сумма всех чисел?

Подсказка: тут надо применить одно из неравенств, пройденных нами.

Варьирование (метод Штурма) — это поиск решения последовательными улучшениями от произвольной начальной ситуации к искомой, в ходе которого нужные нам характеристики “не ухудшаются”.

2 Пусть сумма положительных чисел a и b фиксирована. Как при “сближении” ведут себя величины

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b}; \quad a^2 + b^2; \quad a^3 + b^3; \quad \sqrt{a} + \sqrt{b}?$$

3 Пусть произведение положительных чисел a и b фиксировано. Как при “сближении” ведут себя величины

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b}; \quad a^2 + b^2; \quad a^3 + b^3; \quad a^n + b^n; \quad \sqrt{a} + \sqrt{b}?$$

4 Треугольник целиком содержится в параллелограмме. Докажите, что его площадь не превышает половины площади параллелограмма.

5 Методом Штурма докажите неравенство Коши о средних:

$$\sqrt[n]{x_1 \cdots x_n} \leq \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}.$$

Когда достигается равенство?

6 Каждый ученик одного класса ходил хотя бы в один из двух походов. В каждом походе мальчиков было не более, чем $2/5$. Докажите, что в классе мальчиков не более $4/7$.

7 Сумма положительных чисел a_1, a_2, \dots, a_n равна 1. Докажите, что

$$(1 + a_1)(2 + a_2) \cdots (n + a_n) \leq 2n!$$

8 Выпуклый многоугольник содержится полностью внутри другого. Докажите, что периметр внешнего больше чем периметр внутреннего.

9 Докажите, что при $x_1, \dots, x_n \geq 1$ выполнено неравенство

$$\frac{1}{1+x_1} + \dots + \frac{1}{1+x_n} \geq \frac{n}{1+\sqrt[n]{x_1 \dots x_n}}.$$

10 В парламенте у каждого не более трех врагов. Докажите, что парламент можно разбить на две палаты так, что у каждого парламентария в его палате будет не более одного врага.

11 Пусть сумма неотрицательных x , y и z равна 1. Докажите, что

$$0 \leq xy + yz + zx - 2xyz \leq \frac{7}{27}.$$

12 Докажите, что среди всех n -угольников, вписанных в данную окружность, наибольшую площадь имеет правильный.

13 Сумма положительных чисел a , b , c , d равна 1. Докажите, что

$$\sqrt{1+4a} + \sqrt{1+4b} + \sqrt{1+4c} + \sqrt{1+4d} \leq 4\sqrt{2}.$$

14 Каждая точка плоскости белая или рыжая. На плоскости дан треугольник. Докажите, что можно начертить треугольник с такими же углами, как у данного, и одноцветными вершинами.