Лист 22. Неравенства. Разнобой

23 апреля 2022

9 “В” класс

$\boxed{\mathbf{1}}$ Пусть a, b и c — длины сторон треугольника; α, β и γ — величины противоположных углов. Докажите, что

$$\alpha a + \beta b + \gamma c \geq \frac{\alpha(b+c) + \beta(a+c) + \gamma(a+b)}{2}.$$

$\boxed{\mathbf{2}}$ Известно, что $15x + 4y + 3z = 50$. Докажите, что $x^2 + y^2 + z^2 \geq 10$.

$\boxed{\mathbf{3}}$ Для положительных чисел x, y, z докажите неравенство

$$\frac{x}{x+y} + \frac{y}{y+z} + \frac{z}{z+x} \leq \frac{x}{y+z} + \frac{y}{z+x} + \frac{z}{x+y}.$$

$\boxed{\mathbf{4}}$ Для хранения важных документов фирма заказала изготовителю сейф в форме параллелепипеда. Известно, что материал передней и задней стенок сейфа в 8 раз дороже материала остальных стенок. Какой должна быть форма сейфа, чтобы при заданном объеме стоимость материала была наименьшей?

$\boxed{\mathbf{5}}$ Выясните, какое наименьшее значение может принимать выражение

$$\sqrt{x_1^2 + (1-x_2)^2} + \sqrt{x_2^2 + (1-x_3)^2} + \ldots + \sqrt{x_{2n}^2 + (1-x_1)^2}.$$

$\boxed{\mathbf{6}}$ Известно, что $x, y, z > 0$ и $xyz = 1$. Докажите, что

$$\frac{1}{1+x+y} + \frac{1}{1+y+z} + \frac{1}{1+z+x} \leq 1.$$

$\boxed{\mathbf{7}}$ Докажите, что при $a, b, c > 0$ и $ab + bc + ac = 9$ верно неравенство

$$a^4 + b^4 + c^4 \geq (a+b+c)^2.$$

$\boxed{\mathbf{8}}$ При каких положительных x, y значение выражения $x + 2y + \frac{4}{xy}$ минимально?

$\boxed{\mathbf{9}}$ Докажите, что при $a, b, c > 0$ верно следующее неравенство:

$$\left(\frac{a+2b}{c}\right)^2 + \left(\frac{b+2c}{a}\right)^2 + \left(\frac{c+2a}{b}\right)^2 \geq 27.$$

$\boxed{\mathbf{10}}$ У продавца имеются чашечные весы с неравными плечами и гири. Сначала он взвешивает товар на одной чашке, затем — на другой, и берет средний вес. Не обманывает ли он?

$\boxed{\mathbf{11}}$ Пусть a, b, c — стороны треугольника. Докажите, что

$$abc \geq (a+b-c)(b+c-a)(c+a-b).$$

$\boxed{\mathbf{12}}$ Докажите, что при $a, b, c > 0$ и $a + b + c = 1/2$ верно неравенство

$$\frac{18abc}{ab+bc+ac} \leq 1.$$

$\boxed{\mathbf{13}}$ Для неотрицательных чисел a, b, c и d докажите неравенство:

$$\left(\frac{3a+4b+c+5d}{13}\right)^{13} \geq a^3b^4cd^5.$$

$\boxed{\mathbf{14}}$ Докажите, что для положительных a, b, c верно неравенство

$$a+b+c \leq \frac{a^2+b^2}{2c} + \frac{a^2+c^2}{2b} + \frac{b^2+c^2}{2a} \leq \frac{a^3}{bc} + \frac{b^3}{ac} + \frac{c^3}{ab}.$$

$\boxed{\mathbf{15}}$ Наборы действительных чисел $\{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{20}\}$, каждое из которых заключено между 0 и 1, таковы, что $x_1x_2x_3\ldots x_{20} = (1-x_1)(1-x_2)(1-x_3)...(1-x_{20})$. Найдите среди этих наборов такой, для которого значение $x_1x_2x_3\ldots x_{20}$ максимально.

$\boxed{\mathbf{16}}$ Для натурального n докажите неравенство

$$\sqrt[n]{n!} \leq \frac{n+1}{2}.$$

$\boxed{\mathbf{17}}$ Для положительных чисел a, b, c, d докажите неравенство

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{4}{c} + \frac{16}{d} \geq \frac{64}{a+b+c+d}.$$

$\boxed{\mathbf{18}}$ Докажите неравенство

$$\frac{1}{\sqrt[m]{n}} + \frac{1}{\sqrt[n]{m}} > 1.$$