Листок 21. Неравенство Мюрхеда

11 апреля 2022

9 “В” класс

$\boxed{\mathbf{1}}$ Докажите, что существует бесконечно много чисел вида n^2+3 (n — натуральное), которые представляются в виде суммы двух квадратов целых чисел.

$\boxed{\mathbf{2}}$ Пусть a, b – неотрицательные числа, n, k, p, q – целые неотрицательные. Не пользуясь никакими вспомогательными неравенствами, докажите:

$\boxed{\text{a}}$ $a^3+b^3 \geq a^2b+ab^2$,

$\boxed{\text{b}}$ $a^n+b^n \geq a^{n-k}b^k+a^kb^{n-k}$ при $n>k$,

$\boxed{\text{c}}$ $a^pb^q+b^pa^q \geq a^{p-1}b^{q+1}+b^{p-1}a^{q+1}$ при $p>q+1$.

$\boxed{\mathbf{3}}$ Пусть a, b, c – неотрицательные числа. Не пользуясь никакими вспомогательными неравенствами, докажите:

$\boxed{\text{a}}$ $2(a^3+b^3+c^3) \geq a^2b+b^2a+a^2c+c^2a+b^2c+c^2b \geq 6abc$,

$\boxed{\text{b}}$ $2(a^4+b^4+c^4) \geq a^3b+b^3a+a^3c+c^3a+b^3c+c^3b \geq 2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2) \geq 2abc(a+b+c)$.

$\boxed{\mathbf{4}}$ Придумайте и докажите аналогичную цепочку неравенств от $a^5+b^5+c^5$ до $abc(ab+bc+ca)$.

Симметрический многочлен, полученный из одночлена $x_1^{k_1}x_2^{k_2}\ldots x_n^{k_n}$ всевозможными перестановками переменных и суммированием этих одночленов, обозначим через $S[k_1, k_2, \ldots, k_n]$.

$\boxed{\mathbf{5}}$ Найдите: $\boxed{\text{a}}$ $S[3,0,0]$; $\boxed{\text{b}}$ $S[1,1,1]$; $\boxed{\text{c}}$ $S[2,1,0]$.

$\boxed{\mathbf{6}}$ Пользуясь неравенством Мюрхеда, докажите, что для положительных x, y и z верно неравенство

$$(x+y+z)(xy+yz+zx) \leq 3(x^3+y^3+z^3).$$

$\boxed{\mathbf{7}}$ Для положительных чисел x, y и z докажите, что

$$x+y+z \leq \frac{xy}{z}+\frac{yz}{x}+\frac{zx}{y}.$$

$\boxed{\mathbf{8}}$ Для положительных x и y докажите, что

$$x^2(y^3+x+1)+y^2(x^3+y+1) \le x^4(y+1)+y^4(x+1)+x+y.$$

$\boxed{\mathbf{9}}$ Найдите наименьшее k такое, что для любых положительных x, y и z верно

$$xy(x^2+y^2)^2+yz(y^2+z^2)^2+zx(z^2+x^2)^2 \le k(x^6+y^6+z^6).$$

$\boxed{\mathbf{10}}$ Докажите, что при $x, y, z > 0$ и $x+y+z=3$ выполняется неравенство

$$x^3+y^3+z^3 \ge x^2+y^2+z^2.$$

$\boxed{\mathbf{11}}$ Докажите, что при $a, b, c > 0$ и $abc = 1$ верно неравенство

$$\left(\sqrt{a^4+b^4+c^4}\right)^3 \ge 3\sqrt{3}.$$

$\boxed{\mathbf{12}}$ Докажите обобщение неравенства о среднем квадратичном:

$$\frac{x_1^k+x_2^k+\dots+x_n^k}{n} \ge \left(\frac{x_1+x_2+\dots+x_n}{n}\right)^k.$$

Подсказка: воспользуйтесь ММИ по степени k.

$\boxed{\mathbf{13}}$ Докажите еще одно обобщение неравенства о среднем квадратичном:

$$\frac{a_1^2}{b_1}+\frac{a_2^2}{b_2}+\dots+\frac{a_n^2}{b_n} \ge \frac{(a_1+a_2+\dots+a_n)^2}{b_1+b_2+\dots+b_n}.$$

Когда это неравенство обратится в равенство?

$\boxed{\mathbf{14}}$ Илья желает отметить внутри заданного треугольника точку M так, чтобы для расстояний h_a, h_b, h_c от этой точки до соответствующих сторон треугольника число $\frac{a}{h_a}+\frac{b}{h_b}+\frac{c}{h_c}$ было как можно меньше. Какую точку ему следует выбрать? *Подсказка: воспользуйтесь неравенством из предыдущей задачи.*

$\boxed{\mathbf{15}}$ Докажите, что для всех натуральных n выполняется неравенство

$$\frac{1}{2} < \frac{1}{n^2+1}+\frac{2}{n^2+2}+\ldots+\frac{n}{n^2+n} < \frac{1}{2}+\frac{1}{2n}.$$