

## Листок 20. Транснеравенство и КБШ

03 апреля 2022

9 “В” класс

**1** Последовательно стоит несколько чисел. Если в паре соседних чисел левое больше правого, разрешается поменять их местами и при этом увеличить каждое вдвое. Обязательно ли наступит момент, когда эту операцию нельзя будет выполнить?

**2** Пусть  $a, b, c$  — неотрицательные числа. Докажите неравенства:

**a**  $a^3 + b^3 \geq a^2b + ab^2$ ,

**b**  $a^n + b^n \geq a^{n-k}b^k + a^kb^{n-k}$ ,

**c**  $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$ .

**3** Пусть  $x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_n$ ,  $y_1 \geq y_2 \geq \dots \geq y_n$ ,  $i_1, \dots, i_n$  — произвольная перестановка чисел  $1, \dots, n$ . Докажите **транснеравенство**:

$$x_1y_1 + \dots + x_ny_n \geq x_1y_{i_1} + \dots + x_ny_{i_n} \geq x_1y_n + \dots + x_ny_1.$$

*Подсказка: воспользуйтесь методом математической индукции.*

**4** Докажите, что для положительных  $a, b, c$  верно неравенство:

$$\frac{a^3}{b} + \frac{b^3}{c} + \frac{c^3}{a} \geq a^2 + b^2 + c^2.$$

**5** Докажите, что для неотрицательных  $a, b, c$  верно неравенство:

$$a + b + c \geq \frac{a(b+1)}{a+1} + \frac{b(c+1)}{b+1} + \frac{c(a+1)}{c+1}.$$

**6** Пусть  $x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_n$ ,  $y_1 \geq y_2 \geq \dots \geq y_n$ . Докажите **неравенство Чебышёва**:

$$\frac{x_1y_1 + \dots + x_ny_n}{n} \geq \frac{x_1 + \dots + x_n}{n} \cdot \frac{y_1 + \dots + y_n}{n} \geq \frac{x_1y_n + \dots + x_ny_1}{n}.$$

*Подсказка:  $n$  раз воспользуйтесь транснеравенством для циклических перестановок.*

**7** Докажите, что

$$4(a^6 + b^6) \geq (a^3 + b^3)(a^2 + b^2)(a + b).$$

**8** Пусть  $a \geq b > 0$ ,  $\alpha \geq \beta > 0$ ,  $\alpha\beta = 1$ . Докажите, что  $a + b \leq \alpha a + \beta b$ .

**9** Докажите, что для неотрицательных  $x_i$  верно, что

$$n \cdot (x_1 + \cdots + x_n) \geq (\sqrt{x_1} + \cdots + \sqrt{x_n})^2.$$

**10** Докажите, что для положительных  $x_i$  верно, что

$$(x_1 + \cdots + x_n) \cdot \left( \frac{1}{x_1} + \cdots + \frac{1}{x_n} \right) \geq n^2.$$

**11**

**а** Докажите **неравенство Коши-Буняковского-Шварца (КБШ)**:

$$(x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n)^2 \leq (x_1^2 + \cdots + x_n^2)(y_1^2 + \cdots + y_n^2).$$

**б** При каких  $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n$  неравенство КБШ обращается в равенство?

**12** Известно, что  $a + 2b + 3c$  не меньше 14. Докажите, что  $a^2 + b^2 + c^2$  также не меньше 14.

**13** У каждого жителя города Тьмутаракань есть свои тараканы, не у всех поровну. Два таракана являются товарищами, если у них общий хозяин (в частности, каждый таракан сам себе товарищ). Что больше: среднее количество тараканов, которыми владеет житель города, или среднее количество товарищей у таракана?