

Листок 19. Неравенства о средних

31 марта 2022

9 “В” класс

1 Разбейте все прямые на плоскости на пары так, чтобы в каждой паре прямые были перпендикулярны.

2 а В трапеции с основаниями, равными a и b , проведены четыре отрезка, параллельные основаниям: отрезок X_1Y_1 проходит через точку пересечения диагоналей трапеции, отрезок X_2Y_2 делит трапецию на две подобных, отрезок X_3Y_3 соединяет середины боковых сторон, отрезок X_4Y_4 делит трапецию на две равновеликих. Найдите длины отрезков.

б Для произвольных $a, b > 0$ докажите **неравенство о средних**

$$\frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} \leq \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$$

геометрически (пользуясь предыдущим пунктом).

с Докажите неравенство о средних алгебраически.

д Докажите, что при $a \neq b$ все неравенства предыдущего пункта строгие.

3 Сформулируйте неравенство о средних для произвольного n .

а Докажите неравенство о средних для $n = 2^k$.

б Докажите неравенство о средних для произвольного n .

4 Города A и B расположены на реке на расстоянии 10 км друг от друга. На что пароходу потребуется больше времени: проплыть от A до B и обратно или проплыть 20 км по озеру?

5 Для неотрицательных чисел a и b докажите неравенства:

а $a + 17b \geq 18 \sqrt[18]{ab^{17}}$, б $\frac{a^6 + b^9}{4} \geq 3a^2b^3 - 16$,

с $2\sqrt{a} + 3\sqrt[3]{b} \geq 5\sqrt[5]{ab}$.

6 Докажите, что $\sqrt{a+1} + \sqrt{2a-3} + \sqrt{50-3a} \leq 12$. Достигается ли равенство?

7 Корабль плывет по прямой, с постоянной скоростью мимо небольшого острова. В 12, 14 и 15 часов расстояние от корабля до острова равнялось 7, 5, и 11 км соответственно. Каким было расстояние до острова в 13 часов?

8 Две хозяйки покупали молоко каждый день в течение месяца. Цена на молоко ежедневно менялась. Средняя цена молока за месяц оказалась равной 20 рублям. Ежедневно первая хозяйка покупала по одному литру, а вторая — на 20 рублей. Кто из них потратил за этот месяц больше денег и кто купил больше молока?

9 Для целых положительных чисел a и b докажите неравенство

$$2 \sqrt[a+b]{a^{2b}b^{2a}} \leq a^2 + b^2.$$

10 Пусть $x_1, \dots, x_n > 0$, $x_1 + \dots + x_n = 1$. Найдите наибольшее и наименьшее значения следующих величин (если они существуют):

a $x_1 \cdot \dots \cdot x_n$, **b** $x_1^2 + \dots + x_n^2$, **c** $\frac{1}{x_1} + \dots + \frac{1}{x_n}$,

d $x_1x_2 + x_1x_3 + \dots + x_{n-1}x_n$, **e** $x_1^3 + \dots + x_n^3$.

11 Докажите *неравенство Юнга*: если $a > 0$, $b > 0$, $p > 1$ и $q > 1$, причем p и q рациональны и $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, то

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Подсказка: положите $p = \frac{m+n}{n}$, $q = \frac{m+n}{m}$ и воспользуйтесь неравенством Коши для n чисел a и m чисел b .

12 Докажите, что $x^4 - x + 0,5 > 0$.

13 Докажите, что если $x^5 - x^3 + x = 2$, то $3 < x^6 < 4$.

14 Известно, что $x + y = 1$. Найдите наименьшее значение выражения

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{y}\right)^2.$$