Листок 17. Симметрические многочлены

17 марта 2022

9 "В" класс

$\boxed{\mathbf{1}}$ По кругу выложены черные и белые шары, причем черных в два раза больше, чем белых. Известно, что среди пар соседних шаров одноцветных пар втрое больше, чем разноцветных. Какое наименьшее число шаров могло быть выложено?

Многочлен от двух переменных x и y называется **симметрическим**, *если он не изменяется при замене x на y, а y на x.*

$\boxed{\mathbf{2}}$ Выразите через симметрические многочлены $\sigma_1 = x + y$ и $\sigma_2 = xy$ степенные суммы $x^2 + y^2$, $x^3 + y^3$, $x^4 + y^4$.

$\boxed{\mathbf{3}}$ Докажите по индукции, что каждая степенная сумма $x^n + y^n$ может быть представлена в виде многочлена от σ_1 и σ_2.

$\boxed{\mathbf{4}}$ Докажите, что любой симметрический многочлен от x и y можно представить в виде многочлена от σ_1 и σ_2.

$\boxed{\mathbf{5}}$ Решите системы уравнений:

$\boxed{\text{a}}$ $\begin{cases} x^4 + y^4 = 34, \\ x + y = 2; \end{cases}$ $\boxed{\text{b}}$ $\begin{cases} x^3 + y^3 = 8, \\ x^2 + y^2 = 4. \end{cases}$

Многочлен от нескольких переменных, не изменяющийся при любых перестановках своих переменных, называется **симметрическим**.

Многочлены

$$\begin{aligned}
&\sigma_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1 + x_2 + \ldots + x_n, \\
&\sigma_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1x_2 + x_2x_3 + \ldots + x_{n-1}x_n, \\
&\ldots \\
&\sigma_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1x_2 \ldots x_n.
\end{aligned}$$

называются **элементарными симметрическими**.

$\boxed{\mathbf{6}}$ Выразите через элементарные симметрические многочлены

$\boxed{\text{a}}$ $(x + y)(y + z)(x + z)$, $\boxed{\text{b}}$ $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$,

$\boxed{\text{c}}$ $(x^2+y^2)(y^2+z^2)(x^2+z^2)$, $\boxed{\text{d}}$ $x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2$.

$\boxed{\mathbf{7}}$ Известно, что $a+b+c=0$, $a^2+b^2+c^2=1$. Найдите $a^4+b^4+c^4$.

$\boxed{\mathbf{8}}$ $\boxed{\text{a}}$ Пусть x_1, x_2, x_3 – корни многочлена $f(x)=x^3+x^2-5x-2$. Чему равны значения выражений $x_1+x_2+x_3$, $x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3$, $x_1x_2x_3$?

$\boxed{\text{b}}$ Известно, что многочлен $f(x)=x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$ имеет три корня x_1, x_2, x_3. Сформулируйте и докажите для x_1, x_2, x_3 теорему Виета.

$\boxed{\mathbf{9}}$ Числа x, y, z удовлетворяют системе

$$\begin{cases} x+y+z=a, \\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{a}. \end{cases}$$

Докажите, что хотя бы одно из этих чисел равно a.

$\boxed{\mathbf{10}}$ Найдите все значения параметра a, для каждого из которых многочлен x^3-6x^2+ax+a имеет три корня x_1, x_2, x_3, удовлетворяющие равенству

$$(x_1-3)^3+(x_2-3)^3+(x_3-3)^3=0.$$

$\boxed{\mathbf{11}}$ Постройте кубический многочлен, корни которого равны квадратам корней многочлена x^3+x^2-2x-1.

$\boxed{\mathbf{12}}$ Известно, что многочлен x^3+ax^2+bx+c имеет три корня x_1, x_2, x_3. Найдите многочлен третьей степени, корнями которого являются числа $y_1=x_2x_3$, $y_2=x_1x_3$, $y_3=x_1x_2$.

$\boxed{\mathbf{13}}$ Решите уравнения: $\boxed{\text{a}}$ $\sqrt[3]{8+x}+\sqrt[3]{8-x}=1$,

$\boxed{\text{b}}$ $x+\sqrt{17-x^2}+x\sqrt{17-x^2}=9$,

$\boxed{\text{c}}$ $x\cdot\dfrac{19-x}{x+1}\cdot\left(x+\dfrac{19-x}{x+1}\right)=84$.

<u>Подсказка к первому:</u> введите новые переменные $u=\sqrt[3]{8+x}$, $v=\sqrt[3]{8-x}$ *и решите сначала систему уравнений* $\begin{cases} u+v=1, \\ u^3+v^3=16. \end{cases}$