Листок 18. Кубические многочлены и их корни

13 марта 2022

9 “В” класс

$\boxed{\mathbf{1}}$ Решите уравнение $x^3 - 4x + 3 = 0$ методом

$\boxed{\text{a}}$ подбора рациональных корней, $\boxed{\text{b}}$ дель Ферро

и сравните результаты.

$\boxed{\mathbf{2}}$ Докажите, что кубический многочлен либо имеет три вещественных корня, либо один вещественный и два комплексно-сопряженных, либо кратный корень.

Теорема. *Пусть* $p, q \in \mathbb{C}$ *и* $pq \neq 0$. *Обозначим*

• *через* $\sqrt{D}$ *любое из двух значений квадратного корня из* $D = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}$;

• *через* u *любое из трех значений кубического корня из* $-\frac{q}{2} - \sqrt{D}$;

• *положим* $v = -\frac{p}{3u}$.

Тогда все корни уравнения $x^3+px+q = 0$ *— числа* $u+v$, $u\varepsilon+v\varepsilon^2$, $u\varepsilon^2+v\varepsilon$, где $\varepsilon = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

$\boxed{\mathbf{3}}$ Докажите теорему о решениях уравнения $x^3 + px + q = 0$.

$\boxed{\mathbf{4}}$ Решите следующие уравнения:

$\boxed{\text{a}}$ $(x^2 + 2)^2 = 9(x - 1)^2$;

$\boxed{\text{b}}$ $x^4 + 4x - 1 = 0$;

$\boxed{\text{c}}$ $x^4 + 2x^2 - 8x - 4 = 0$;

$\boxed{\text{d}}$ $x^4 - 12x^2 - 24x - 14 = 0$.

Указание к b). Метод Феррари:

подберите такие α, b, c, *что* $x^4 + 4x - 1 = (x^2 + \alpha)^2 - (bx + c)^2$. *Для этого необходимо хотя бы одно* α, *для которого квадратный трехчлен* $(x^2 + \alpha)^2 - (x^4 + 4x - 1)$ *от* x *является полным квадратом. Найдите дискриминант этого квадратного трехчлена. Он является кубическим многочленом от* α *и называется кубической резольвентой многочлена* $x^4 + 4x - 1$.

$\boxed{\mathbf{5}}$ Составьте кубическое уравнение, корнем которого является число $\cos 20^o$, и докажите его иррациональность.

Листок 18. Кубические многочлены и их корни

13 марта 2022

9 “B” класс

$\boxed{\mathbf{1}}$ Решите уравнение $x^3 - 4x + 3 = 0$ методом

$\boxed{\text{a}}$ подбора рациональных корней, $\boxed{\text{b}}$ дель Ферро

и сравните результаты.

$\boxed{\mathbf{2}}$ Докажите, что кубический многочлен либо имеет три вещественных корня, либо один вещественный и два комплексно-сопряженных, либо кратный корень.

Теорема. *Пусть $p, q \in \mathbb{C}$ и $pq \neq 0$. Обозначим*

- *через $\sqrt{D}$ любое из двух значений квадратного корня из $D = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}$;*
- *через u любое из трех значений кубического корня из $-\frac{q}{2} - \sqrt{D}$;*
- *положим $v = -\frac{p}{3u}$.*

Тогда все корни уравнения $x^3+px+q=0$ — числа $u+v$, $u\varepsilon+v\varepsilon^2$, $u\varepsilon^2+v\varepsilon$, где $\varepsilon = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

$\boxed{\mathbf{3}}$ Докажите теорему о решениях уравнения $x^3 + px + q = 0$.

$\boxed{\mathbf{4}}$ Решите следующие уравнения:

$\boxed{\text{a}}$ $(x^2 + 2)^2 = 9(x - 1)^2$;

$\boxed{\text{b}}$ $x^4 + 4x - 1 = 0$;

$\boxed{\text{c}}$ $x^4 + 2x^2 - 8x - 4 = 0$;

$\boxed{\text{d}}$ $x^4 - 12x^2 - 24x - 14 = 0$.

Указание к b). Метод Феррари:

подберите такие α, b, c, что $x^4 + 4x - 1 = (x^2 + \alpha)^2 - (bx + c)^2$. Для этого необходимо хотя бы одно α, для которого квадратный трехчлен $(x^2 + \alpha)^2 - (x^4 + 4x - 1)$ от x является полным квадратом. Найдите дискриминант этого квадратного трехчлена. Он является кубическим многочленом от α и называется кубической резольвентой многочлена $x^4 + 4x - 1$.

$\boxed{\mathbf{5}}$ Составьте кубическое уравнение, корнем которого является число $\cos 20^o$, и докажите его иррациональность.