Листок 16. Комплексные числа

8 марта 2022

9 “В” класс

Комплексным числом *называется выражение вида* $a+bi$*, где* a*,* b *— произвольные действительные числа. Сложение и умножение комплексных чисел производится аналогично сложению и умножению многочленов, причем считается, что* $i^2=-1$.

Множество комплексных чисел обозначается $\mathbb{C}$*. Числа вида* $a+0i$ *считают действительными.*

Действительной *и* **мнимой** *частями числа* $a+bi$ *называются величины*

$$\mathrm{Re}(a+bi)=a \quad \text{и} \quad \mathrm{Im}(a+bi)=b.$$

Модулем *комплексного числа* $a+bi$ *считается величина*

$$|a+bi|=\sqrt{a^2+b^2}.$$

Комплексно-сопряжённым *к числу* $z=a+bi$ *называется число*

$$\overline{z}=\overline{a+bi}=a-bi.$$

$\boxed{\mathbf{1}}$ Докажите, что для любого комплексного числа $z\neq 0$ существует такое комплексное число w, что $zw=1$.

$\boxed{\mathbf{2}}$ Выведите формулу для частного от деления комплексного числа $a+bi$ на $c+di$.

$\boxed{\mathbf{3}}$ Проверяющий дает вам два числа, а вы должны посчитать сумму, разность, произведение и частное этих чисел.

$\boxed{\mathbf{4}}$ Докажите, что

$\boxed{\text{a}}$ $\overline{z_1+z_2}=\overline{z_1}+\overline{z_2}$; $\boxed{\text{b}}$ $\overline{z_1z_2}=\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}$; $\boxed{\text{c}}$ $z\cdot\overline{z}=|z|^2$; $\boxed{\text{d}}$ $|z_1\cdot z_2|=|z_1|\cdot|z_2|$.

$\boxed{\mathbf{5}}$ Методом неопределенных коэффициентов найдите

$\boxed{\text{a}}$ $\sqrt{3-4i}$; $\boxed{\text{b}}$ $\sqrt{\sqrt{2}+i\sqrt{2}}$; $\boxed{\text{c}}$ $\sqrt{12-5i}$.

$\boxed{\mathbf{6}}$ Решите в комплексных числах следующие уравнения:

$\boxed{\text{a}}$ $z^2+4z+29=0$; $\boxed{\text{b}}$ $z^3-1=0$; $\boxed{\text{c}}$ $z^2-(3-2i)z+5-5i=0$.

Комплексному числу $z=a+bi$ *соответствует точка* (a,b) *комплексной плоскости* $\mathbb{C}$*, при этом* $|z|$ *равен расстоянию от* z *до начала координат* O.

Определим **аргумент** *комплексного числа* $z=a+bi$ *как угол* φ *между вектором* $\overrightarrow{Oz}$ *и положительным направлением оси* Ox*. Очевидно, что угол определяется с точностью до слагаемого, кратного* 2π.

7 Выясните геометрический смысл сложения комплексных чисел.

8 Покажите, что если $z = a + bi \neq 0$, то $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. Такое представление комплексного числа называют **тригонометрическим** (или **полярным**).

9 Представьте в тригонометрической форме числа
a $z = -1/2 + i\sqrt{3}/2$; b $z = \sqrt{2} + \sqrt{2}i$;
c $z = -5$; d $z = -17i$.

10 Представьте в алгебраической форме числа
a $z = 3(\cos\pi/6 + i\sin\pi/6)$; b $z = 2(\cos 3\pi/4 + i\sin 3\pi/4)$.

11 Докажите, что преобразование комплексной плоскости, переводящее точку z в точку $z' = iz$, является движением. Каким? (Подсказка: докажите, что расстояние между точками, т.е. модуль разности, сохраняется.)

12 Какое преобразование комплексной плоскости переводит точку z в точку $z' = az$, если
a $a = \cos\alpha + i\sin\alpha$ — комплексное число с единичным модулем;
b a — произвольное комплексное число, отличное от нуля?

13 a Докажите, что при умножении комплексных чисел их модули перемножаются, а аргументы складываются.
b Выведите отсюда формулы для косинуса суммы и синуса суммы.

14 Докажите **формулу Муавра**:

$$(r(\cos\varphi + i\sin\varphi))^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi).$$

15 Выполните действия:
a $\dfrac{(\sqrt{2} + i\sqrt{2})^6}{(\sqrt{3} - i)^3}$; b $(1 + i\sqrt{3})^4 \cdot (\sqrt{3} + i)^5$.

16 Найдите и изобразите на комплексной плоскости все значения корней:
a $\sqrt[4]{-16}$; b $\sqrt[5]{32i}$; c $\sqrt[6]{-27i}$.

17 Решите уравнения
a $z^4 - 2z^2 + 4 = 0$; b $z^6 + 6z^3 + 10 = 0$.

18 Метеоролог считает промежуток из n подряд идущих дней *удачным*, если число солнечных дней в этом промежутке было нечетным. Какое максимальное количество удачных промежутков могло быть в июле?