

Листок 2. Графы — знакомство

9 сентября 2021

9 "В" класс

1 (олимп) У выпуклого пятиугольника все стороны равны, а все углы различны. Докажите, что наибольший и наименьший углы соседние.

2 (база) В неоконченном турнире по круговой системе участвуют 7 школьников. Известно, что Маша сыграла 6 партий, Настя — 5, Ваня и Илья — по 3, Федя и Артур — по две, Ева — одну. С кем сыграл Илья?

3 (обяз) В трех вершинах пятиугольника расположили по фишке. Разрешается двигать их по диагонали в свободную вершину. Можно ли такими действиями добиться того, чтобы одна из фишек вернулась на первоначальное место, а две другие поменялись местами?

4 (база) Гарри Поттер умеет превращать жабу в принцессу, гриб в жабу или грушу, грушу в яблоко, огрызок от яблока в котенка или ежика, котенка в грушу или яблоко, ежика в грушу, а яблоко только в огрызок. Сейчас у него есть яблоко. Может ли он превратить его в принцессу?

5 (обяз) В 20-этажном доме испорчен лифт, он может либо поднимать на 8 этажей, либо опускаться на 13. Можно ли спуститься на лифте с 20 этажа на 1? Есть ли в доме этаж, с которого можно попасть на любой другой?

6 (продв) Рассмотрим круговой турнир n участников без ничьих. Докажите, что можно занумеровать участников так, что 1-й выиграл у 2-го, 2-й у 3-го, ..., $(n - 1)$ -й у n -го.

7 (продв) Докажите, что, если в круговом турнире без ничьих есть цикл длины k , то найдутся $k - 2$ цикла длины 3.

8 (обяз) На множестве всех людей рассматриваются предикаты: $P(x) = "x — ученик вашего класса"$, $C(x) = "у человека x живет кошка"$, $D(x) = "у человека x живет собака"$. Запишите следующие утверждения, используя указанные предикаты, кванторы и логические связки:

1) У некоторого ученика вашего класса есть и кошка, и собака.

2) Каждый ученик вашего класса имеет либо кошку, либо собаку.

Постройте отрицания к каждому из этих утверждений так, чтобы символ отрицания относились только к предикатам.

9 (база) В поселке 97 телефонов. Можно ли их соединить проводами так, чтобы было 36 телефонов, каждый из которых соединен с тремя другими, 50 телефонов, каждый из которых соединен с шестью другими, и 11 телефонов, каждый из которых соединен с пятью другими?

10 (база) Докажите, что в любом графе число вершин нечетной степени четно.

11 (обяз) В тридевятом царстве лишь один вид транспорта — ковер-самолет. Из столицы выходит 21 ковровиния, из города Дальний — одна, а из всех остальных — по 20. Докажите, что из столицы можно долететь в Дальний (возможно, с пересадками).

12 (обяз) В городе 25 универсамов. Известно, что из любых трех универсамов можно выбрать два, расстояние между которыми меньше одного километра. Докажите, что среди универсамов найдутся 13, лежащих в круге радиуса 1 км.

13 (база) Докажите, что среди шести людей обязательно найдётся либо тройка попарно знакомых, либо тройка попарно незнакомых.

14 (продв) Пусть каждые два человека либо дружат, либо враждуют, либо незнакомы. Докажите, что среди 17 людей обязательно найдётся либо тройка попарно дружащих, либо тройка попарно враждующих, либо тройка попарно незнакомых.

15 (олимп) На шахматной доске стоит несколько черных и белых ладей, причем каждая ладья (как белая, так и черная) бьет больше белых, чем черных. Может ли черных ладей быть

a столько же, сколько белых?

b больше, чем белых?

16 (олимп) Натуральное число n назовем *хорошим*, если у числа $n^2 + 1$ найдутся два натуральных делителя, различающихся на n . Докажите, что хороших чисел бесконечно много. (Указание. Для начала перебором найдите три первых хороших числа)