

Листок 16. Кубические многочлены и их корни

27 января 2022

9 “В” класс

Комплексные числа вошли в математику благодаря работе над кубическими уравнениями. Формулу для корней кубического уравнения получил около 1535 г. Н. Тарталья, а опубликовал около 1543 г. итальянский математик Д. Кардано, и формула носит его имя. Однако еще раньше Сципион дель Ферро нашел способ решения неполных кубических уравнений.

1 Решите следующие кубические уравнения:

a $x^3 + 6x^2 + 3x - 10 = 0$; **b** $x^3 + 6x + 2 = 0$; **c** $x^3 - 3x^2 + 6x - 6 = 0$;

d $x^3 + px + q = 0$ (достаточно привести алгоритм решения);

e $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, где $a \neq 0$ (достаточно привести алгоритм решения).

Если не получается, то попробуйте решить следующие задачи.

2 Покажите, что следующие уравнения:

a $x^3 + 3x^2 + 5x + 7 = 0$

b $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, где $a \neq 0$,

сводятся заменой переменных к уравнению $y^3 + py + q = 0$ с некоторыми коэффициентами p, q .

3 Докажите, что $\sqrt[3]{\sqrt{5} + 2} - \sqrt[3]{\sqrt{5} - 2} = 1$.

Указание. $(u - v)^3 = u^3 - v^3 - 3uv(u - v)$.

4 **a** Найдите хотя бы одно решение уравнения $x^3 - 3\sqrt[3]{2}x + 3 = 0$.

b Решите уравнение $x^3 - 3\sqrt[3]{2}x + 3 = 0$.

Указание. Воспользуйтесь методом дель Ферро: так как

$$(u + v)^3 = u^3 + v^3 + 3uv(u + v),$$

то число $u + v$ является корнем уравнения $x^3 - 3uvx - (u^3 + v^3) = 0$.

5 **a** Разложите на множители выражение $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$.

b Докажите неравенство $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$. Когда достигается равенство?

c Докажите неравенство $a^3 + b^3 + c^3 \geq 3abc$ при $a, b, c > 0$.

6 Докажите **теорему Виета**: если x_1, x_2, x_3 — корни уравнения $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$, то $x_1 + x_2 + x_3 = -a$, $x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = b$, $x_1x_2x_3 = -c$.

7 Найдите сумму кубов всех корней уравнения $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$.

8 Пусть a, b, c — корни уравнения $x^3 + px + q = 0$. Напишите уравнение, корнями которого будут числа

$$\frac{b+c}{a^2}, \quad \frac{a+c}{b^2}, \quad \frac{b+a}{c^2}.$$

9 С помощью замены переменных $x = u + v$ решите, подобно кубическому, уравнение Муавра $x^5 - 5ax^3 + 5a^2x - 2b = 0$.

10 При каких a, b и c корни уравнения $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ образуют

- а) арифметическую; б) геометрическую прогрессию?